МЕХАНИКА MECHANICS

УДК 531.383-11: 534.1

DOI 10.12737/12600

Метод скаляризации в задачах распространения поверхностных упругих волн во вращающемся трансверсально-изотропном полупространстве*

И. П. Мирошниченко¹, В. А. Погорелов², В. П. Сизов^{3**}¹ Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация^{2,3} Ростовский-на-Дону научно-исследовательский институт радиосвязи, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

Scalarization method in problems of elastic surface-wave propagation in rotating transversely isotropic half-space***

I. P. Miroshnichenko¹, V. A. Pogorelov², V. P. Sizov^{3**}¹ Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation^{2,3} Rostov Scientific Research Institute for Radiocommunication, Rostov-on-Don, Russian Federation

Целями работы являются обобщение метода скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах на задачи для сред, вращающихся с постоянной угловой скоростью, а также разработка научно-методического аппарата для описания влияния вращения на параметры поверхностных акустических волн. На основе указанного метода предложен научно-методический аппарат для конструирования новых гироскопов на акустических волнах. Получены и обоснованы соотношения для расчета параметров поверхностных акустических волн (ПАВ), распространяющихся на границе вращающегося полупространства из трансверсально-изотропного материала с произвольно расположенной осью материальной симметрии. Приведен пример численного моделирования для случая изотропного вращающегося полупространства. Предлагаемый научно-методический аппарат и примеры численного моделирования могут быть использованы для разработки новых видов гироскопов на акустических волнах для систем навигации, ориентации и управления различными подвижными объектами в авиации, робототехнике и т.п.

Ключевые слова: метод скаляризации, трансверсально-изотропная среда, акустические волны, поверхностные акустические волны.

The work objectives are to generalize the scalarization method of dynamic elastic fields in the transversely isotropic media to the tasks for the environments rotating with a constant angular velocity, and to develop the methodological apparatus for describing the effect of rotation on the parameters of surface acoustic waves. On the basis of this method, the scientific-methodical device for the construction of new acoustic-wave gyroscopes is proposed. Parameter determination ratios for surface-acoustic waves (SAW) propagating on the boundary of the rotating half-space of the transversely isotropic material with arbitrarily spaced axis of material symmetry are obtained and validated. An example of the numerical simulation for the isotropic rotating half-space case is given. The proposed methodological apparatus and numerical simulation examples can be used to develop new types of gyroscopes on acoustic-wave systems for navigation, guidance and control of various mobile objects in aviation, robotics, etc.

Keywords: scalarization method, transversely isotropic medium, acoustic waves, surface acoustic waves.

Введение. При решении задач динамической теории упругости успешно применяется метод скаляризации [1–3], заключающийся в представлении тензорных полей перемещений, напряжений и деформаций через независимые скалярные функции [4–6]. Применение данного метода существенно облегчает решение многих задач по определению упругих полей в различных конструкциях. Так, в [4] определено напряженно-деформированное состояние (НДС) в многослойной цилиндрической трубе при динамических нагрузках. В [5] рассчитано НДС в слоистой цилиндрической

* Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

** E-mail: lpmir2011@yandex.ru

*** The research is done within the frame of the independent R&D.

конструкции при многократном воздействии локальных динамических нагрузок. В [6] дан анализ динамического поведения анизотропных многослойных конструкций и т. д.

Целью настоящей работы является обобщение данного метода на задачи для трансверсально-изотропных сред, вращающихся с постоянной угловой скоростью Ω , а также получение соотношений для описания влияния вращения на параметры поверхностных акустических волн (ПАВ), которые могут использоваться в гироскопах [7–9].

Исходные соотношения. Уравнение движения в перемещениях для монохроматических волн $(e^{-i\omega t})$, содержащих массовые силы, по [10, 11] имеет вид:

$$-\omega^2 \rho u^i = \nabla_j C^{ijrs} \nabla_r u_s + F^i, \quad (1)$$

где F^i — вектор плотности объемных сил; ρ — плотность; ω — частота.

Для трансверсально-изотропных материалов тензор коэффициентов упругости C^{ijrs} может быть разложен на неприводимые части следующим образом [12]:

$$C^{ijrs} = C_1 g^{ij} g^{rs} + C_2 (g^{ir} g^{js} + g^{is} g^{jr}) + C_3 [(3n^i n^j - g^{ij}) g^{rs} + (3n^r n^s - g^{rs}) g^{ij}] + \\ + C_4 [(3n^i n^r - g^{ir}) g^{js} + (3n^j n^s - g^{is}) g^{ir} + (3n^i n^s - g^{is}) g^{jr} + (3n^j n^r - g^{jr}) g^{is}] + \\ + C_5 (35n^i n^j n^r n^s - 30n^{(i} n^j g^{rs)}) + 3g^{(ij} g^{rs)},$$

где n_i — единичный вектор главной оси симметрии;

$$C_1 = \frac{1}{3} (C_l^{\{4\}} + 2C_l^{\{22\}}); \quad C_2 = \frac{1}{3} (C_l^{\{4\}} - C_l^{\{22\}}); \quad (2)$$

$$C_3 = \frac{1}{12} (C_g^{\{4\}} + 2C_g^{\{22\}}); \quad C_4 = \frac{1}{12} (C_g^{\{4\}} - C_g^{\{22\}}); \quad C_5 = \frac{1}{8} C_n^{\{4\}}; \quad (3)$$

$$C_l^{\{4\}} = \frac{1}{15} (8C_{11} + 3C_{33} + 4C_{13} + 8C_{44});$$

$$C_l^{\{22\}} = \frac{1}{6} (-C_{11} + 3C_{12} + 4C_{13} - 4C_{44}); \quad C_g^{\{4\}} = \frac{2}{21} (-8C_{11} + 6C_{33} + 2C_{13} + 4C_{44});$$

$$C_g^{\{22\}} = \frac{1}{3} (2C_{11} - 6C_{12} + 4C_{13} - 4C_{44}); \quad C_n^{\{4\}} = \frac{8}{35} (C_{11} + C_{33} - 2C_{13} - 4C_{44}). \quad (4)$$

Константы, входящие в коэффициенты разложения (4), являются элементами матрицы упругих постоянных, записанной по свернутому индексу.

Пренебрегая центробежными силами как малой величиной второго порядка, а также учитывая, что $\Omega = const$, представим массовые силы в виде сил Кориолиса. Тогда вектор плотности объемных сил можно записать следующим образом:

$$F^s = -i2\omega^2 \rho \frac{1}{\omega} \varepsilon^{sjk} \Omega_j u_k, \quad (5)$$

где Ω_j — вектор угловой скорости, ε^{sjk} — дискриминантный тензор.

Для квазипродольных и квазипоперечных волн, учитывая работу [3] и принимая во внимание выражение (5), уравнения движения могут быть записаны в виде следующей системы:

$$\nabla^s \nabla_s u_j^{(k)} + b_1 u_j^{(k)} + b_2 \nabla_j \nabla^s u_s^{(k)} = -\frac{i}{C_{44}} 2\omega^2 \rho \frac{1}{\omega} \varepsilon_{jfs} \Omega^j u^s^{(k)}; \quad (6)$$

$$\nabla_\beta \nabla^\alpha u_\alpha^{(k)} + b_3 u_\beta^{(k)} + b_4 \nabla_j \nabla_\beta u_j^{(k)} = -\frac{i}{C_{11}} 2\omega^2 \rho \frac{1}{\omega} \varepsilon_{\beta js} \Omega^j u^s^{(k)}. \quad (7)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} b_1^{(k)} &= \frac{1}{C_{44}} \left(\omega^2 \rho - h^2 (-C_{13} + C_{33} - 2C_{44}) \right); \\ b_2 &= \frac{1}{C_{44}} (C_{13} + C_{44}); \quad b_3^{(k)} = \frac{1}{C_{11}} \left(\omega^2 \rho - h^2 C_{44} \right); \quad b_4 = \frac{1}{C_{11}} (C_{13} + C_{44}); \end{aligned} \quad (8)$$

$(k) = L, T$, индекс L относится к квазипродольным волнам, а индекс T — к квазипоперечным; $h^{(k)}$ — проекция волнового вектора $g^{(k)}$ на ось материальной симметрии; индекс J — фиксированный, он соответствует главной оси симметрии материала, $\beta = K, N$; фиксированные индексы J, K, N относятся к локальному аффинному реперу $\bar{e}_J, \bar{e}_K, \bar{e}_N$, имеющему один инвариантный базисный вектор $\bar{e}_J$, когда справедливы уравнения (6) и (7).

Решаемая научная задача заключается в том, чтобы найти аналитическое решение уравнений (6), (7) для трансверсально-изотропного полупространства, вращающегося с постоянной скоростью.

Постановка задачи. Конкретизируем задачу рассмотрением плоских волн, распространяющихся в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Рассмотрим трансверсально-изотропное полупространство, граница которого представляет собой плоскость. Нормаль к границе составляет угол α с направлением оси симметрии полупространства.

Для описания волн в полупространстве введем соответствующую аффинному реперу $\bar{e}_J, \bar{e}_K, \bar{e}_N$ Декартову систему координат x^J, x^K, x^N , где ось x^J совпадает с осью симметрии материала полупространства, а ось x^K лежит в плоскости распространения волн. Вращение полупространства производится вокруг оси x^N с угловой скоростью Ω .

Направление распространения волн определяется волновым вектором $g^{(k)}$. Вектор $g^{(k)}$ составляет угол θ с осью x^J (рис.1).

Рис. 1. Расчетная схема плоских волн, распространяющихся в плоскости, перпендикулярной оси вращения

Компоненты перемещений квазипродольных и квазипоперечных волн во вращающемся полупространстве являются решением уравнений движения (6), (7).

Компоненты напряжения могут быть определены из закона Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijrs} \nabla_{(r} u_{s)}. \quad (9)$$

Поле также должно удовлетворять граничным условиям свободной поверхности полупространства.

Решение задачи.

Объемные волны. Используя метод скаляризации, запишем компоненты перемещений через скалярные потенциалы для квазипродольных волн φ и для квазипоперечных волн W , как это сделано в [3]:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \varphi + \frac{1}{g} \left(\delta_i^J g^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^J} \right) W, \quad (10)$$

где δ_i^J – символ Кронекера.

Функции φ и W являются решениями уравнений Гельмгольца с собственными значениями $g^{(K)} = \omega/V_{(K)}$; $V_{(L)}$ и $V_{(T)}$ — скорости квазипродольных и квазипоперечных волн.

Представим решение уравнений Гельмгольца в виде плоских волн:

$$\varphi = \varphi_0 e^{i h x^J} e^{i \xi x^K} \quad W = W_0 e^{i h x^J} e^{i \xi x^K}, \quad (11)$$

где $h^2 + \xi^2 = g^2$.

Используя (10), из выражений (6) и (7) соответственно получим:

$$\beta_{11}\varphi + \beta_{12}W = 0; \quad \beta_{21}\varphi + \beta_{22}W = 0, \quad (12)$$

где:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &= i h \left[-g^2(1+b_2) + b_1 \right] + \frac{\xi}{C_{44}} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}; & \beta_{12} &= \frac{\xi^2}{g} \left(b_1 - g^2 \right) + \frac{i}{C_{44}} \frac{\xi}{g} h 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}; \\ \beta_{21} &= i \xi \left(b_3 - \xi^2 - b_4 h^2 \right) - \frac{h}{C_{11}} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}; & \beta_{22} &= \frac{h^2 \xi}{g} \left(\xi^2 - b_3 - b_4 \xi^2 \right) + \frac{i}{C_{11}} \frac{\xi^2}{g} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (13)$$

Приравнявая к нулю определитель системы уравнений (12), найдем соотношение для определения $g^{(K)}$. В результате получившееся уравнение отличается от аналогичного в [3, 11] наличием слагаемых, учитывающих вращение среды. Если вращение отсутствует ($\Omega = 0$), то это соотношение совпадает с соответствующим уравнением для одноосных кристаллов [11].

Из выражения (12) следует соотношение $V = \varphi/W = -\beta_{12}/\beta_{11} = -\beta_{22}/\beta_{21}$, используя которое запишем формулу (10) для определения перемещений через скалярные потенциалы в форме, аналогичной [3]:

$$u_i = \left(D_1 \frac{\partial}{\partial x^i} + D_2 \frac{\partial}{\partial x^J} \delta_i^J \right) \varphi + \left(\frac{1}{g} D_1 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^J} + g \delta_i^J \right) W; \quad (14)$$

$$D_1 = 1 - \frac{h^2 \left[b_1 - g^2(1+b_2) \right] + i \frac{h \xi}{C_{44}} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}}{\xi^2 (b_1 - g^2) + i \xi \frac{h}{C_{44}} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}};$$

$$D_2 = \frac{i \xi^{(L)} (\xi^{(L)} - b_3 - \xi^{(L)} b_4) - \frac{1}{C_{44}} \frac{\xi^{(L)2}}{h} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}}{i \xi^{(L)} (b_3 - \xi^{(L)} - b_4 h^2) - \frac{h}{C_{11}} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}}; \quad D_1 = 1 + \frac{i \frac{\xi^{(T)2}}{h} (b_1 - g^2) - \frac{1}{C_{44}} \xi^{(T)} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}}{ih \left[-g^2 (1 + b_2) + b_1 \right] + \frac{\xi^{(T)}}{C_{44}} 2\omega^2 \rho \frac{\Omega}{\omega}}. \quad (15)$$

Компоненты тензора напряжений находятся из закона Гука:

$$\sigma_{ij} = \left[d_1^{(L)} \delta_{ij} + d_2^{(L)} \delta_i^J \delta_j^J + d_3^{(L)} \frac{1}{2} \left(\delta_i^J \frac{\partial^2}{\partial x^J \partial x^J} + \delta_j^J \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^J} \right) \frac{\partial}{\partial x^J} + d_4^{(L)} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right] \Phi + \left[d_1^{(T)} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x^J} + d_2^{(T)} \delta_i^J \delta_j^J \frac{\partial}{\partial x^J} + d_3^{(T)} \frac{1}{2} \left(\delta_i^J \frac{\partial}{\partial x^J} + \delta_j^J \frac{\partial}{\partial x^i} \right) + d_4^{(T)} \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^j \partial x^J} \right] W, \quad (16)$$

где в соответствии с [3] имеем:

$$\begin{aligned} d_1^{(L)} &= -g^2 a_1 + h^2 a_3 \left(D_1 + D_2 \right); & d_2^{(L)} &= -g^2 a_3 - h^2 \left(2a_4 D_2 + a_5 D_2 + a_5 D_1 \right); \\ d_3^{(L)} &= 2a_2 D_2 + 2a_4 \left(2D_1 + D_2 \right); & d_4^{(L)} &= 2a_2 D_1; \\ d_1^{(T)} &= a_1 g \left(1 - D_1 \right) + a_3 \left(g - h^2 g^{-1} D_1 \right); & d_2^{(T)} &= a_3 g \left(1 - D_1 \right) + 2a_4 g + a_5 \left(g - h^2 g^{-1} D_1 \right); \\ d_3^{(T)} &= 2a_2 g + 2a_4 \left(g - 2h^2 g^{-1} D_1 \right); & d_4^{(T)} &= 2a_2 D_1 g^{-1}; \\ a_1 &= C_{12}; a_2 = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}); & a_3 &= -C_{12} + C_{13}; \\ a_4 &= \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) + C_{44}; & a_5 &= C_{11} + C_{33} - 2(C_{13} + 2C_{44}). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, формулы (14) и (16) описывают тензорные поля перемещений и напряжений через скалярные потенциалы и могут использоваться при расчете параметров упругих волн, находящихся в поле сил Кориолиса. Заметим, что форма соотношений (14) и (16) совпадает с формулами для полей, записанных через скалярные потенциалы в [3]. Отличие заключается в значении коэффициентов (15), в которых есть слагаемые, учитывающие вращение.

Поверхностные волны. С целью удовлетворения граничным условиям для удобства введем связанную с границей декартову систему координат x, y, z , которая образуется поворотом системы координат x^J, x^K, x^N путем против часовой стрелки вокруг оси x^N на угол α (см. рис. 1). В этом случае уравнения преобразования имеют вид:

$$\begin{aligned} z &= -x^K \sin \alpha + x^J \cos \alpha; & x^K &= x \cos \alpha - z \sin \alpha; \\ x &= x^K \cos \alpha + x^J \sin \alpha; & x^J &= x \sin \alpha + z \cos \alpha; \\ y &= x^N; & x^N &= y. \end{aligned} \quad (19)$$

При этом ось z совпадает с нормалью к границе, а оси x, y направлены параллельно ей.

Компоненты полей в системе координат x, y, z могут быть выражены через компоненты в системе координат x^J, x^K, x^N следующим образом [13]:

$$u_z = \frac{\partial x^J}{\partial z} u_J + \frac{\partial x^K}{\partial z} u_K; \quad u_x = \frac{\partial x^J}{\partial x} u_J + \frac{\partial x^K}{\partial x} u_K;$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial x^J}{\partial z} \frac{\partial x^m}{\partial z} \sigma_{Jm} + \frac{\partial x^K}{\partial z} \frac{\partial x^m}{\partial z} \sigma_{Km}; \quad \sigma_{zx} = \frac{\partial x^J}{\partial z} \frac{\partial x^m}{\partial x} \sigma_{Jm} + \frac{\partial x^K}{\partial z} \frac{\partial x^m}{\partial x} \sigma_{Km}. \quad (20)$$

Зависимости проекций h, ξ волнового вектора g на оси координат x^J, x^K, x^N и проекции этого вектора на оси координат x, y, z выглядят так:

$$h = \frac{\cos \theta}{\sin(\alpha + \theta)} g_x = \frac{\cos \theta}{\cos(\alpha + \theta)} g_z; \quad \xi = \frac{\sin \theta}{\sin(\alpha + \theta)} g_x = \frac{\sin \theta}{\cos(\alpha + \theta)} g_z; \quad g^2 = h^2 + \xi^2 = g_z^2 + g_x^2. \quad (21)$$

Используя выражения (19)–(21) из соотношений (14), (16) и (20), после несложных преобразований получим формулы для описания полей в системе координат x, y, z :

$$u_z = i g_z \left(D_1 + \frac{\cos \theta \cos \alpha}{\cos(\alpha + \theta)} D_2 \right) \bar{\varphi} + i g_z \left(-\cos \theta D_1 + \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha + \theta)} \right) \frac{g}{\xi} \bar{W}; \quad (22)$$

$$u_x = i g_z \left(\frac{\cos \theta \cos \alpha}{\cos(\alpha + \theta)} \left(D_1 + D_2 \right) + \frac{\sin \theta \cos \alpha}{\cos(\alpha + \theta)} D_1 \right) \bar{\varphi} + i \frac{g}{\xi} g_z \left(-\frac{\sin(\alpha + \theta) \cos \theta}{\cos(\alpha + \theta)} D_1 + \frac{\sin \alpha}{\cos(\alpha + \theta)} \right) \bar{W}; \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} = & \left\{ \cos^2 \alpha \left[d_1 + d_2 - \left(d_3 + d_4 \right) \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right] + \sin 2\alpha \left(\frac{1}{2} d_3 + d_4 \right) \frac{\sin 2\theta}{2 \cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 + \right. \\ & \left. + \sin^2 \alpha \left(d_1 - d_4 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right) \right\} \bar{\varphi} - \frac{g}{\xi} \left\{ \cos^2 \alpha \frac{\cos \theta}{\cos(\alpha + \theta)} g_z \left(d_1 + d_2 + d_3 - d_4 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right) - \right. \\ & \left. - \sin 2\alpha \frac{\sin \theta g_z}{\cos(\alpha + \theta)} \left(\frac{1}{2} d_3 - d_4 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right) + \sin^2 \alpha \frac{\cos \theta g_z}{\cos(\alpha + \theta)} \left(d_1 - d_4 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right) \right\} \bar{W}; \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} = & \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left[d_2 - \left(d_3 + d_4 \right) \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 + d_4 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right] - \left(1 - 2 \sin^2 \alpha \right) \left(\frac{1}{2} d_3 + d_4 \right) \times \right. \\ & \times \frac{\sin 2\theta}{2 \cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \left. \right\} \bar{\varphi} - \frac{g}{\xi} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{\cos \theta}{\cos(\alpha + \theta)} g_z \left(d_2 + d_3 - d_4 \frac{\cos 2\theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right) + \right. \\ & \left. + \left(1 - 2 \sin^2 \alpha \right) \frac{\sin \theta}{\cos(\alpha + \theta)} g_z \left(\frac{1}{2} d_3 - d_4 \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2(\alpha + \theta)} g_z^2 \right) \right\} \bar{W}. \quad (25) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{\varphi} = \varphi_0 e^{i g_z z} e^{i g_x x}$; $\bar{W} = W_0 e^{i g_z z} e^{i g_x x}$.

Таким образом, найдены выражения для компонентов полей, которые входят в граничные условия.

Так как в полупространстве существуют падающие и отраженные волны, а в силу закона Снеллиуса

$g_x = g_x = g$, функции $\bar{\varphi}$ и $\bar{W}$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = & \left(\varphi^+ e^{i g_z z} + \varphi^- e^{-i g_z z} \right) e^{i g_x x} e^{-i \alpha t}; \\ \bar{W} = & \left(W^+ e^{i g_z z} + W^- e^{-i g_z z} \right) e^{i g_x x} e^{-i \omega t}. \quad (26) \end{aligned}$$

Здесь $\varphi^\pm, W^\pm$ — амплитуды, подлежащие определению из граничных условий.

Для удобства дальнейшего изложения представим компоненты перемещений u_i и напряжений σ_{ij} , входящие в граничные условия, в виде вектор-столбца:

$$B = (u_z, u_x, \sigma_{zz}, \sigma_{zx})^T = (u, \sigma)^T. \quad (27)$$

Для определения этих компонентов запишем следующее матричное соотношение:

$$B = CF\Psi, \quad (28)$$

где:

$$C = \begin{pmatrix} C_{(1)} & C_{(2)} \\ C_{(3)} & C_{(4)} \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} F^+ & 0 \\ 0 & F^- \end{pmatrix}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{pmatrix}; \quad F^+ = \begin{pmatrix} e^{i g_z^{(L)} z} & 0 \\ 0 & e^{i g_z^{(T)} z} \end{pmatrix};$$

$$F^- = \begin{pmatrix} e^{-i g_z^{(L)} z} & 0 \\ 0 & e^{-i g_z^{(T)} z} \end{pmatrix}; \quad \Psi^+ = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ W^+ \end{pmatrix}; \quad \Psi^- = \begin{pmatrix} \varphi^- \\ W^- \end{pmatrix}; \quad C_{(1)} = \begin{pmatrix} C_{(11)} & C_{(12)} \\ C_{(21)} & C_{(22)} \end{pmatrix};$$

$$C_{(3)} = \begin{pmatrix} C_{(31)} & C_{(32)} \\ C_{(41)} & C_{(42)} \end{pmatrix}.$$

Здесь опущены фазовый и временной множители $e^{i g_x x}, e^{-i \omega t}$.

Блоки $C_{(2)}$ и $C_{(4)}$ совпадают соответственно с $C_{(1)}$ и $C_{(3)}$, если у элементов главной диагонали матрицы $C_{(1)}$ и побочной диагонали матрицы $C_{(3)}$ изменить знаки на противоположные.

Элементы $C_{(ij)}$ матрицы C определяются из формул (22)–(25). Они представляют собой выражения, которые являются множителями, стоящими в формулах (22)–(25) перед функциями $\bar{\varphi}$ и $\bar{W}$. Например, элемент $C_{(11)}$ — это множитель перед $\bar{\varphi}$ в формуле (22), элемент $C_{(12)}$ — множитель перед $\bar{W}$ в этой формуле, элемент $C_{(21)}$ — множитель перед $\bar{\varphi}$ в формуле (23) и т. д.

Зная значения элементов матрицы C , можно для различных материалов определить параметры волны в зависимости от вращения Ω полупространства, а также от углов α и θ .

Граничные условия в данных обозначениях запишутся так:

$$B = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{при } z = 0. \quad (29)$$

Компоненты вектор-столбца Ψ представляют собой амплитуды падающих и отраженных полей в полупространстве. Если представить падающее поле в виде продольной волны с единичной амплитудой, то отраженное поле будет определяться коэффициентами отражения $\Gamma_{\varphi\varphi}, \Gamma_{\varphi W}$ и вектор-столбец $\Psi = (1, 0, \Gamma_{\varphi\varphi}, \Gamma_{\varphi W})^T$. При падающей поперечной волне единичной амплитуды $\Psi = (0, 1, \Gamma_{W\varphi}, \Gamma_{WW})^T$. Подставляя эти значения Ψ в соотношение (28) и учитывая, что напряжение на свободной поверхности равно 0 (29), можно найти формулы для компонентов Γ . Совокупность этих формул запишем в виде выражения для матрицы Γ следующим образом:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{\varphi\varphi} & \Gamma_{W\varphi} \\ \Gamma_{\varphi W} & \Gamma_{WW} \end{pmatrix} = -C_{(4)}^{-1} C_{(3)} = -\frac{1}{\Delta_1} \begin{pmatrix} C_{(42)}C_{(31)} + C_{(32)}C_{(41)} & 2C_{(42)}C_{(32)} \\ 2C_{(41)}C_{(31)} & C_{(41)}C_{(32)} + C_{(31)}C_{(42)} \end{pmatrix}; \quad (30)$$

$$\Delta_1 = C_{(33)}C_{(44)} - C_{(43)}C_{(34)}. \quad (31)$$

Для определения скорости распространения ПАВ вдоль свободной границы достаточно приравнять к нулю определитель Δ_1 (31) и решить получившееся уравнение относительно $g_x = \omega/V_R$, где V_R – скорость ПАВ.

Компоненты перемещений для волн, распространяющихся в приграничном слое, могут быть найдены из выражений:

$$\begin{aligned} u_z &= A_0 \left(C_{(11)} C_{(42)} e^{i g_z^{(L)} z} - C_{(12)} C_{(41)} e^{i g_z^{(L)} z} \right) e^{i g_x x} e^{-i \omega t}; \\ u_x &= A_0 \left(C_{(21)} C_{(42)} e^{i g_z^{(L)} z} - C_{(22)} C_{(41)} e^{i g_z^{(L)} z} \right) e^{i g_x x} e^{-i \omega t}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для поверхностных волн, когда они убывают при удалении от границы, величины g_z являются мнимыми $g_z^{(L)} = i \alpha_z$, $g_z^{(T)} = i \alpha_z$, и вещественные значения u_z и u_x описывают траекторию частиц, участвующих в переносе ПАВ.

Таким образом, полученные соотношения позволяют исследовать влияние вращения на параметры ПАВ в трансверсально-изотропном полупространстве. Для этого достаточно найти коэффициенты C_{ij} из выражений (22)–

(25), где $g^{(K)}$ определяются из (12) при $\Delta = 0$. Далее по формуле (31) при $\Delta_1 = 0$ вычислить фазовую скорость и, следовательно, частоту ПАВ. Затем, используя (32), можно определить изменение амплитуды колебаний частиц, участвующих в переносе ПАВ, а также форму эллиптической траектории движения частиц.

Изотропные среды. В качестве примера рассмотрим изменение параметров ПАВ в изотропном вращающемся полупространстве.

В изотропном случае имеем:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{33} = \lambda + 2\mu; & C_{13} &= -C_{12} = \lambda; & C_{44} &= \mu; \\ a_1 &= \lambda; & a_2 &= \mu; & a_3 &= a_4 = a_5 = 0; \\ d_1^{(L)} &= -\lambda q \chi^2; & d_2^{(L)} &= 0; & d_3^{(L)} &= 2\mu R_2^*; \\ d_4^{(L)} &= 2\mu(1 - R_3^*); & d_1^{(T)} &= -\lambda q R_1^*; & d_2^{(T)} &= 0; \\ d_3^{(T)} &= 2\mu \chi; & d_4^{(T)} &= 2\mu \frac{1}{\chi} (1 + R_1^*). \end{aligned} \quad (33)$$

$$\text{Здесь } D_1^{(L)} = 1 + R_3^*; D_2^{(L)} = R_2^*; D_1^{(T)} = 1 + R_1^*; R_1^* \cong \frac{-2}{\sqrt{1 - \frac{1}{S} \left(1 - \frac{1}{q}\right)}} \frac{\Omega}{\omega}; R_2^* \cong \frac{-2\sqrt{\frac{q}{S}}}{\sqrt{\frac{S}{q} - 1} (1 - q)} \frac{\Omega}{\omega}; R_3^* \cong \frac{\sqrt{1 - \frac{q}{S}}}{\sqrt{(1 - q)}} \frac{\Omega}{\omega}.$$

Малой величиной второго порядка $\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2$ пренебрегли.

$$b_1^{(K)} = b_1^{(L)} = b_1^{(T)} = \frac{\omega^2 \rho}{\mu}; b_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}; b_3^{(K)} = \frac{\omega^2 \rho - h^2 \mu}{\lambda + 2\mu}; b_4 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}; \quad (34)$$

λ, μ — упругие константы Ламе.

Элементы матрицы C имеют вид:

$$C_{(11)} = i(R_2^* - R_3^*) \chi \sqrt{q - S} + i \chi \sqrt{q - S}; \quad C_{(12)} = -\frac{i}{\sqrt{S}} [\chi S - \chi(1 - S) R_1^*];$$

$$\begin{aligned}
 C_{(21)} &= -i\chi\sqrt{S}R_3^* + i\chi\sqrt{S}; \quad C_{(22)} = i(\chi\sqrt{1-S} + \chi\sqrt{1-S}R_1^*); \\
 C_{(31)} &= -\mu\chi^2(1-2S) - 2\mu\chi^2(q-S)(R_2^* - R_3^*); \\
 C_{(32)} &= -\frac{1}{\sqrt{S}}\left(\mu\chi^2\left(\frac{1}{q} - 2S\right)\sqrt{1-S}R_1^* - 2\mu\chi^2S\sqrt{1-S}\right); \\
 C_{(41)} &= -\chi^2\sqrt{q-S}\sqrt{S}2\mu\left(1 + \frac{1}{2}R_2^*\right) + \chi^2\sqrt{q-S}\sqrt{S}2\mu R_3^*; \\
 C_{(42)} &= -\chi^2(1-S)2\mu R_1^* + \chi^22\mu\left(S - \frac{1}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь $q = \frac{K^2}{\chi^2}$; $S = \frac{g_x^2}{\chi^2}$; $k = \frac{\omega}{v_l}$; $\chi = \frac{\omega}{v_l}$; $g_x = \frac{\omega}{v_R}$; $v_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$; $v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$; v_l — скорость продольных волн; v_t — скорость поперечных волн; v_R — скорость ПАВ.

Скорость распространения ПАВ определяется при $\Delta_1 = 0$ из уравнения (31), которое в явном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\left[(1-2S)^2 + 4S\sqrt{q-S}\sqrt{1-S}\right] + 2\left[(1-2S)(1-S) - \sqrt{q-S}\sqrt{1-S}\left(\frac{1}{q} - 2S\right)\right]R_1^* + \\
 &+ 2\left[(1-2S)(q-S) + S\sqrt{1-S}\sqrt{q-S}\right]R_2^* - 2\left[(1-2S)(q-S) + 2S\sqrt{1-S}\sqrt{q-S}\right]R_3^* = 0,
 \end{aligned} \tag{36}$$

где необходимо брать вещественные корни.

Это уравнение отличается от известного [14] наличием слагаемых, учитывающих вращение полупространства. Определив из уравнения (36) величину S при заданных q и $\frac{\Omega}{\omega}$, можно использовать формулы (35) для нахождения компонентов поля (27).

Для волн, распространяющихся в приграничном слое, эти компоненты могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 u_z &= C_{(11)}\Phi^+ e^{i g_z^{(L)} z} + C_{(12)}W^+ e^{i g_z^{(T)} z}; \\
 u_x &= C_{(21)}\Phi^+ e^{i g_z^{(L)} z} + C_{(22)}W^+ e^{i g_z^{(T)} z};
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zz} &= C_{(31)}\Phi^+ e^{i g_z^{(L)} z} + C_{(32)}W^+ e^{i g_z^{(T)} z}; \\
 \sigma_{zx} &= C_{(41)}\Phi^+ e^{i g_z^{(L)} z} + C_{(42)}W^+ e^{i g_z^{(T)} z}.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Найдем амплитуды потенциалов Φ^+ и W^+ . Для этого предположим, что источники в виде давления расположены на границе. Тогда, используя граничные условия, можно решить систему уравнений (38) и, подставив решение в (37), получим выражение для компонентов перемещений. Восстанавливая множитель $e^{-i\omega t} e^{i g_x x}$, имеем:

$$\begin{aligned}
 u_z &= A_0 \left(C_{(11)}C_{(42)}e^{i g_z^{(L)} z} - C_{(12)}C_{(41)}e^{i g_z^{(T)} z} \right) e^{-i\omega t} e^{i g_x x}; \\
 u_x &= A_0 \left(C_{(21)}C_{(42)}e^{i g_z^{(L)} z} - C_{(22)}C_{(41)}e^{i g_z^{(T)} z} \right) e^{-i\omega t} e^{i g_x x}.
 \end{aligned} \tag{39}$$

Для поверхностных волн, когда волны убывают при удалении от границы, величины g_z являются мнимыми

$g_z^{(L)} = i\alpha$, $g_z^{(T)} = i\alpha$ и вещественные значения u_z и u_x описывают траекторию частиц, участвующих в переносе ПАВ.

Движение частиц вблизи поверхности может быть найдено из (39) при $z=0$ и после подстановки элементов матрицы $C_{(ij)}$ из (35) определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} u_z &= A \frac{1}{2} \sqrt{s-q} \left[-1 + (s-1)R_2^* + R_3^* \right] \sin(g_x x - \omega t); \\ u_x &= A \sqrt{s} \left[0,5 - s + \sqrt{s-1} \sqrt{s-q} + (1-s + \sqrt{s-1} \sqrt{s-q}) R_1^* + (s - 0,5 - \sqrt{s-1} \sqrt{s-q}) R_3^* + \right. \\ &\quad \left. + 0,5 \sqrt{s-1} \sqrt{s-q} R_2^* \right] \cos(g_x x - \omega t). \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь s находится из уравнения (36).

Из этих формул видно, что траектория смещения частиц в поверхностной волне представляет собой эллипс, оси которого зависят от скорости вращения различным образом.

Численное моделирование и анализ его результатов. В качестве иллюстрации на рис. 2 приведен график, соответствующий зависимости скорости распространения ПАВ $S = \frac{v_t^2}{v_R^2}$ от скорости вращения полупространства

$$w = \frac{\Omega}{\omega} \text{ при } q = 0,33.$$

Рис. 2. График зависимости скорости распространения ПАВ от скорости вращения полупространства

Как видно из данного графика, фазовая скорость увеличивается или уменьшается в зависимости от направления вращения Ω полупространства. При малом вращении эта зависимость имеет почти линейный характер.

На рис. 3 приведены траектории движения частиц на поверхности при $w=0$, $w=0,01$, $w=0,02$ и $w=0,08$ соответственно для $q = 0,33$.

Рис. 3. Траектории движения частиц на поверхности при различных скоростях вращения полупространства

Как видно, траектория движения частиц вблизи поверхности изменяется при вращении полупространства. Причем малая ось эллипса изменяется в большей степени, чем большая.

Вывод. Таким образом, с помощью метода скаляризации найдено аналитическое решение задачи исследования параметров ПАВ при вращении трансверсально-изотропного полупространства. Кроме того, приведены соотношения для расчета фазовой скорости (и, следовательно, частоты ПАВ), а также амплитуды и формы движения частиц, участвующих в переносе ПАВ. Все эти факторы могут использоваться при конструировании гироскопов на акустических волнах.

Библиографический список

1. Фельсен, Л. Излучение и рассеяние волн / Л. Фельсен, Н. Маркуш. — Москва : Мир, 1978. — Т. 1. — 547 с.
2. Морс, Ф. М. Методы теоретической физики / Ф. М. Морс, Г. Фешбах. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1960. — Т. 2. — 896 с.
3. Сизов, В. П. О скаляризации динамических упругих полей в трансверсально-изотропных средах / В. П. Сизов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1988. — № 5. — С. 55–58.
4. Петров, А. М. Определение напряженно-деформированного состояния в многослойной цилиндрической трубе при динамических нагрузках / А. М. Петров, В. П. Сизов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 1994. — № 5. — С. 69–75.
5. Мирошничено, И. П. Определение напряженно-деформированного состояния в слоистой цилиндрической конструкции при многократном воздействии локальных динамических нагрузок / И. П. Мирошничено, В. П. Сизов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 1. — С. 97–104.
6. Петров, А. М. Динамическое поведение анизотропных многослойных цилиндрических конструкций / А. М. Петров, В. П. Сизов // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2000. — № 3. — С. 34–39.
7. Микроакустомеханический гироскоп : патент 2543706 Рос. Федерация : МПК G 01 C 19/56, H 03 H 9/25 / Ю. В. Вахтин [и др.]. — № 2013143420/28 ; заявл. 25.09.2013 ; опубл. 10.03.2015, Бюл. № 7. — 8 с.
8. Гироскоп на поверхностных акустических волнах : патент 2390727 Рос. Федерация / В. А. Калинин [и др.]. — № 2009109734/28 ; заявл. 17.03.2009 ; опубл. 27.05.2010, Бюл. № 15. — 8 с.
9. Apparatus and method for detecting a rotation : patent 7895892 B2 US / R. Aigner. — 01.03.2011.
10. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. — Москва : Мир, 1975. — 872 с.
11. Федоров, Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах / Ф. И. Федоров. — Москва : Наука, 1965. — 386 с.
12. Сиротин, Ю. И. Основы кристаллографии / Ю. И. Сиротин, М. П. Шаскольская. — Москва : Наука, 1975. — 680 с.
13. Рашевский, П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. — Москва : Наука, 1967. — 664 с.
14. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах / Л. М. Бреховских. — Москва : АН СССР, 1957. — 502 с.

References

1. Felsen, L., Marcush, N. Izluchenie i rasseyanie voln. [Radiation and scattering of waves.] Moscow: Mir, 1978, vol. 1, 547 p. (in Russian).
2. Morse, F.-M., Feshbach, H. Metody teoreticheskoy fiziki. [Methods of Theoretical Physics.] Moscow: Izdatel'stvo inostrannoy literatury, 1960, vol. 2, 896 p. (in Russian).
3. Sizov, V.P. O skalyarizatsii dinamicheskikh uprugikh poley v transversal'no-izotropnykh sredakh. [On scalarization of dynamic elastic fields in transversely isotropic media.] Izvestia: Mechanics of Solids, 1988, no. 5, pp. 55–58 (in Russian).
4. Petrov, A.M., Sizov, V.P. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v mnogosloynnoy tsilindricheskoy trube pri dinamicheskikh nagruzkakh. [Determination of stress-strain state in a multi-cylindrical tube under dynamic loads.] Izvestia: Mechanics of Solids, 1994, no. 5, pp. 69–75 (in Russian).
5. Miroshnichenko, I.P., Sizov, V.P. Opredelenie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya v sloistoy tsilindricheskoy konstruksii pri mnogokratnom vozdeystvii lokal'nykh dinamicheskikh nagruzk. [Determination of stress-strain state in a layered cylindrical structure under local dynamic loading.] Izvestia: Mechanics of Solids, 2000, no. 1, pp. 97–104 (in Russian).

6. Petrov, A.M., Sizov, V.P. Dinamicheskoe povedenie anizotropnykh mnogosloynnykh tsilindricheskikh konstruksiy. [Dynamic behavior of anisotropic multilayered cylindrical structures.] Izvestia: Mechanics of Solids, 2000, no. 3, pp. 34–39 (in Russian).
7. Vakhtin, Y.V., et al. Mikroakustomekhanicheskiy giroskop: patent 2543706 Ros. Federatsiya: MPK G 01 C 19/56, H 03 H 9/25. [Microacoustomechanical gyroscope.] RF Patent no. 2543706, 2015 (in Russian).
8. Kalinin, V.A., et al. Giroskop na poverkhnostnykh akusticheskikh volnakh: patent 2390727 Ros. Federatsiya. [Acoustic-surface-wave gyroscope.] RF Patent no. 2390727, 2010 (in Russian).
9. Aigner, R. Apparatus and method for detecting a rotation: patent 7895892 B2 US, 01.03.2011.
10. Novatsky, V. Teoriya uprugosti. [Elasticity theory.] Moscow: Mir, 1975, 872 p. (in Russian).
11. Fedorov, F.I. Teoriya uprugikh voln v kristallakh. [Elastic wave theory in crystals.] Moscow: Nauka, 1965, 386 p. (in Russian).
12. Sirotin, Y.I., Shaskolskaya, M.P. Osnovy kristallografii. [Basic crystallography.] Moscow: Nauka, 1975, 680 p. (in Russian).
13. Rashevskiy, P.K. Rimanova geometriya i tenzornyy analiz. [Riemann geometry and tensor analysis.] Moscow: Nauka, 1967, 664 p. (in Russian).
14. Brekhovskikh, L.M. Volny v sloistyykh sredakh. [Waves in layered media.] Moscow: AN SSSR, 1957, 502 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 23.04.2015

Сдана в редакцию 23.04.2015

Запланирована в номер 30.06.2015