

УДК 539.375

Равновесная плоская трещина с угловыми точками контура в упругом слое

Б. В. Соболь, Е. В. Рашидова, Е. В. Борисова, С. Б. Петренкова

(Донской государственный технический университет)

Рассмотрена трёхмерная статическая задача теории упругости о равновесии упругого слоя, ослабленного плоской прямоугольной трещиной. Трещина расположена в срединной плоскости слоя, поддерживается в раскрытом состоянии под действием нормальной нагрузки, приложенной к её берегам. Границы слоя находятся в условиях гладкого контакта с двумя жёсткими основаниями. Применением двумерного интегрального преобразования Фурье к уравнениям равновесия задача сведена к решению известного сингулярного интегро-дифференциального уравнения относительно функции раскрытия трещины. Решение уравнения строится прямым вариационным методом. В окрестности угловых точек контура решение достраивается численно, с учётом заранее выделенной особенности. Получены значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура трещины. Установлены особенности поведения решения в окрестности прямолинейных участков и угловых точек контура.

Ключевые слова: трещина, контур, коэффициент интенсивности напряжений, слой, сингулярное интегральное уравнение, вариационный метод, силовой критерий разрушения, угловая точка, окрестность, относительная толщина слоя

Введение. Как было установлено в многочисленных работах отечественных и зарубежных исследователей (например, [1]), в точках гладкости контура трещины функция раскрытия трещины должна иметь асимптотику

$$\gamma(x, y) = N(x, y) n^{1/2}(x, y), \quad (1)$$

где $n(x, y)$ — расстояние по нормали от внутренней точки области до контура трещины, $N(x, y)$ — некоторая регулярная функция.

В случаях, когда контур трещины имеет особые точки: во-первых, нарушается состояние плоской деформации в окрестности этих точек, во-вторых, меняется показатель особенности поля напряжений и перемещений в окрестности контура вблизи таких точек. Определению показателей при особенности в зависимости от угла излома контура посвящён ряд работ отечественных и зарубежных исследователей [2].

Если в плоскости расположения трещины ввести полярную систему координат с полюсом в особой точке контура, то функция раскрытия трещины в окрестности этой точки асимптотически может быть, описана соотношением

$$\gamma(x, y) = L(a) \left(\frac{\rho}{a} \right)^\varepsilon, \quad (2)$$

где ρ, a — полярные координаты точки, $L(a)$ — некоторая регулярная функция.

Рассмотрим наиболее распространённый частный случай, когда контур трещины в точке излома образует прямой угол. В этом случае установлен следующий показатель особенности в соотношении (2): $\varepsilon = 0,816$.

Постановка задачи. Продемонстрируем методику решения задач теории упругости для трещин с особыми точками контура на примере задачи о прямоугольной трещине в слое.

Трещина расположена в срединной плоскости слоя, поддерживается в раскрытом состоянии под действием нормальной нагрузки, приложенной к её берегам. Границы слоя находятся в условиях гладкого контакта с двумя жёсткими основаниями. Применением двумерного интегрального преобразования Фурье к уравнениям равновесия в перемещениях задача о продольной равновесной

трещине в слое сводится к решению двумерного сингулярного интегро-дифференциального уравнения [3]:

$$\Delta \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{R} + \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) S(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta = -\frac{2\pi}{\theta} p(x, y), \quad (3)$$

здесь $(x, y) \in \Omega$, Ω — область расположения трещины в плане, $R = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$,

$\theta = E / [2(1 - v)]$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $p(x, y)$ — нагрузка, приложенная к берегам трещины, E — модуль Юнга, v — коэффициент Пуассона, $S(x, y, \xi, \eta)$ — регулярная часть ядра уравнения, характеризующая влияние геометрических параметров задачи: размеров трещин в плане, относительных расстояний между ними и (или) до границ рассматриваемых тел. Для задачи о трещине, лежащей в срединной плоскости слоя, имеем [3]:

$$S(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{h^3} F(R/h), \quad F(t) = \int_0^\infty u [H(u) - u] J_0(ut) du,$$

$H(u) = u (\sinh 2u + 2u) (\cosh u - 1)^{-1}$, $J_0(x)$ — функция Бесселя 1-го рода.

Решение уравнения (3) будем строить прямым вариационным методом, описанным в [4]. В рассматриваемом случае область интегрирования описывается неравенствами: $\Omega: |x| \leq a, |y| \leq b$ (рис. 1).

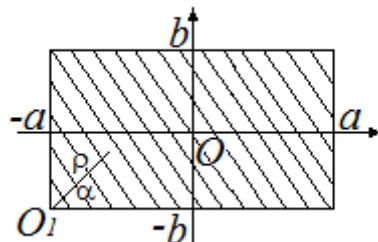


Рис. 1. Схема трещины

Метод решения. Выберем, систему координатных функций таким образом, чтобы установленная выше асимптотика (2) с соответствующим показателем явно учитывалась. Ограничимся рассмотрением, как наиболее характерного частного случая, равномерно распределённой нагрузки $p(x, y)$ на берегах трещины, где $p(x, y) = p = \text{const}$. Решение задачи при этом строится в виде:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \\ \gamma(x, y) &= \frac{P}{\theta} a \Psi^{1/2}(x, y) \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты A_{mn} в разложении (4) определяются из условия минимума функционала:

$$J(\gamma) = \iint_{\Omega} \gamma(x, y) \iint_{\Omega} \gamma(\xi, \eta) K_2(\xi - x, \eta - y) d\xi d\eta dx dy - \frac{2\pi^2}{\theta} \iint_{\Omega} \gamma(x, y) pdxdy, \quad (5)$$

где $K_2(a, \beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{u^2 + v^2} L(b\sqrt{u^2 + v^2}) \cos au \cos bv du dv$.

Следует отметить, что в аналогичном виде вариационный метод был использован при исследовании задачи о равновесии упругого пространства ослабленного трещиной [5]. В качестве

координатных функций в этой работе были использованы степенные функции с множителем, явно содержащим требуемую асимптотику в окрестности контура трещины.

Минимизация функционала (5) в рассматриваемом случае приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_{mn} :

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N A_{ij} Q_{ijmn} = 2rf(\pi m, \pi n), \quad (6)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots, M$; $n = 0, 1, 2, \dots, N$.

В данной задаче $f(a, \beta) = \frac{J_1(a)J_1(\beta)}{a\beta}$. При вычислении коэффициентов системы (6) использовано значение интеграла

$$\iint_{\Omega} \Psi^{1/2}(x, y) \cos \frac{ax}{a} \cos \frac{\beta y}{b} dx dy = \frac{\pi^2}{4} abf(a, \beta),$$

полученного с помощью (3.752) из [6].

Вычисление элементов четырёхмерной матрицы Q_{ijmn} производится с использованием представлений (5.4) из [4].

Сравнительный анализ и сопоставление численных результатов. Конечной целью исследования задачи теории упругости для тела с трещиной, как известно, является определение критических нагрузок, при которых трещина становится неустойчивой и начинает расти. Поскольку в качестве основного критерия разрушения в данной работе принят силовой критерий [7], перейдём к определению коэффициента интенсивности нормальных напряжений в окрестности контура трещины в каждом из рассмотренных случаев. Особое внимание в дальнейшем также будет уделяться сравнительному анализу применяемых здесь методов и сопоставлению численных результатов.

Контроль точности решения задачи вариационным методом приводился сопоставлением результатов при различном количестве используемых координатных функций (M и N). В частности, вычислялась амплитуда раскрытия берегов трещины в центре при различных соотношениях геометрических параметров задачи. Во всех рассмотренных ниже случаях расхождение результатов счёта при $M = N = 4$ и $M = N = 6$ не превысило 3,5 %.

Кроме того, о достоверности получаемых результатов могут свидетельствовать и следующие качественные рассуждения. При вытягивании трещины вдоль одной из осей симметрии, амплитуда её раскрытия в центре, а также численные значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений в средней части большей из сторон прямоугольного контура должны быть близки к известным соответствующим решениям задач о полосовой трещине и эллиптической трещине с такими же полуосами. Причём, поскольку упомянутая полосовая трещина ширины $2b$ содержит внутри себя прямоугольную область, а эллиптическая, в свою очередь, содержится в последней, решение задачи о прямоугольной трещине, по известному принципу сравнения [8], должно быть заключено между соответствующими решениями этих двух задач. В таблице 1 представлены приведённые значения амплитуды вертикальных перемещений $u(0,0)\theta/(ra)$ в центре трещины для полосовой [3], эллиптической [9] и прямоугольной трещины. Вычисления проведены для предельного случая $\lambda \rightarrow \infty$. Для сопоставления, здесь же приведён соответствующий результат работы [5].

В случаях эллиптической и прямоугольной трещин при вычислениях принято следующее соотношение размеров $b/a = 0,5$. Вычисления показывают, что и при конечной толщине слоя установленные закономерности не нарушаются.

Таблица 1

Приведённые значения амплитуды вертикальных перемещений в центре полосовой, прямоугольной и эллиптической трещины

(4)	[5]	[9]	[3]
0,882	0,872	0,826	1,000

Перейдём к анализу численных значений коэффициента интенсивности нормальных напряжений K_I при обходе по контуру прямоугольной трещины. В этой задаче более удобно рассматривать не относительные значения параметра K_I (как в задачах об эллиптических трещинах, где точное аналитическое решение для предельного случая $\lambda \rightarrow \infty$ существует), а абсолютные. Вдоль каждой из сторон прямоугольной области значения коэффициента интенсивности нормальных напряжений будем вычислять по формулам:

$$K_{Ia}(x) = pa \sqrt{\frac{2}{b} I(x, 0)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a}, \quad (7)$$

$$K_{Ib}(y) = pa \sqrt{\frac{2}{a} I(0, y)} \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N A_{mn} \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (8)$$

Графики изменения коэффициента интенсивности нормальных напряжений вдоль большей и меньшей сторон прямоугольника представлены на рис. 2 (а, б). Вычисления проведены для ряда значений параметра $\lambda = h/a$ при $b/a = 0,5$. Отметим, что максимальные амплитудные значения K_I достигает на большей стороне. Опираясь на силовой критерий разрушения, можно сделать вывод, что при достижении приложенной нагрузки своего критического значения, рост прямоугольной трещины начнётся с середин больших сторон. На рис. 3 представлены соответствующие графики, иллюстрирующие решение задачи для случая трещины квадратной формы ($b = a$).

С приближением к угловым точкам контура трещины коэффициент интенсивности нормальных напряжений стремится к нулю. Это обусловлено особым видом асимптотики (2) функции раскрытия трещины в окрестности этих точек, с соответствующим показателем. Перейдём к построению решения задачи $\gamma(x, y)$ в окрестности угловых точек.

Вдоль лучей, выходящих из угловой точки контура под различными углами α , вычисляются значения функции: $L(\alpha) = \gamma(x, y) / (\rho/a)$.

Фрагменты результатов таких вычислений представлены в таблице 2 (при $b/a = 0,5$) и таблице 3 (при $b/a = 1$).

В каждом из случаев, представленных в таблицах, нетрудно обнаружить интервал изменения отношения $\rho/a \in [r_1, r_2]$, в котором функция с достаточно высокой точностью сохраняет стабильность вдоль каждого луча и изменяется лишь при переходе с одного луча на другой. Упомянутая закономерность ранее была установлена для предельного случая рассматриваемой здесь задачи, соответствующего $\lambda \rightarrow \infty$ [5], [10].

Расположение и размеры этой зоны зависят от a , отношения сторон области трещины b/a и относительной толщины слоя λ . Таким образом, определив для каждого значения величины $L(\alpha)$ на указанном отрезке $[r_1, r_2]$, представляется возможным достроить искомую функцию $\gamma(x, y)$ по асимптотической формуле (2) непосредственно до вершины угла трещины.

Графики функции $L(\alpha)$ при различных относительных толщинах слоя представлены на рисунке 4 (слева — $b/a = 0,5$, справа — $b/a = 1$).

Следует отметить симметричность функции $\gamma(x, y)$ в окрестности угловой точки контура относительно биссектрисы. Между тем, сама прямоугольная область расположения трещины такой симметрией не обладает.

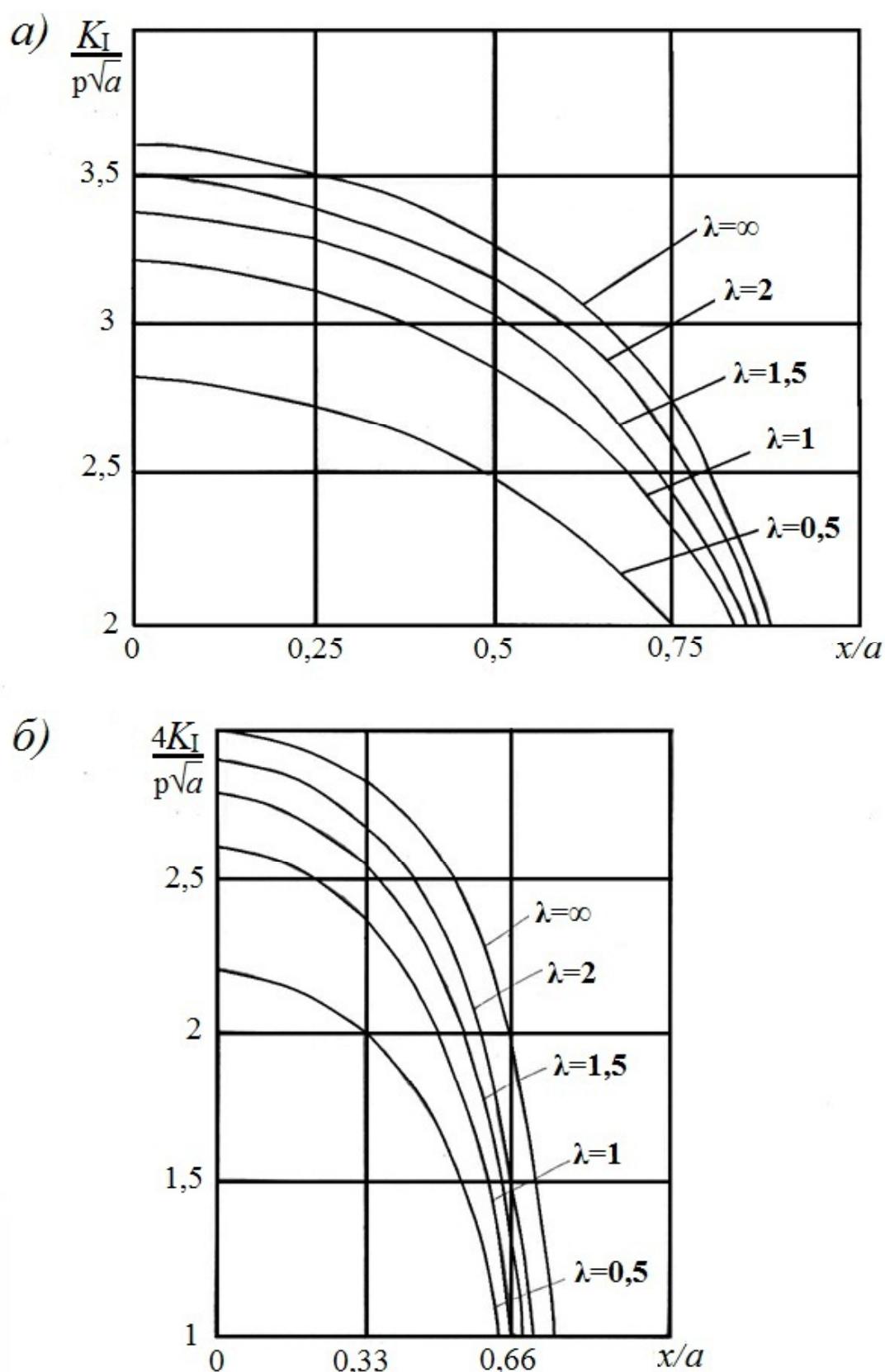


Рис. 2. Изменение коэффициента интенсивности нормальных напряжений вдоль большой (а) и меньшей (б) сторон прямоугольной трещины

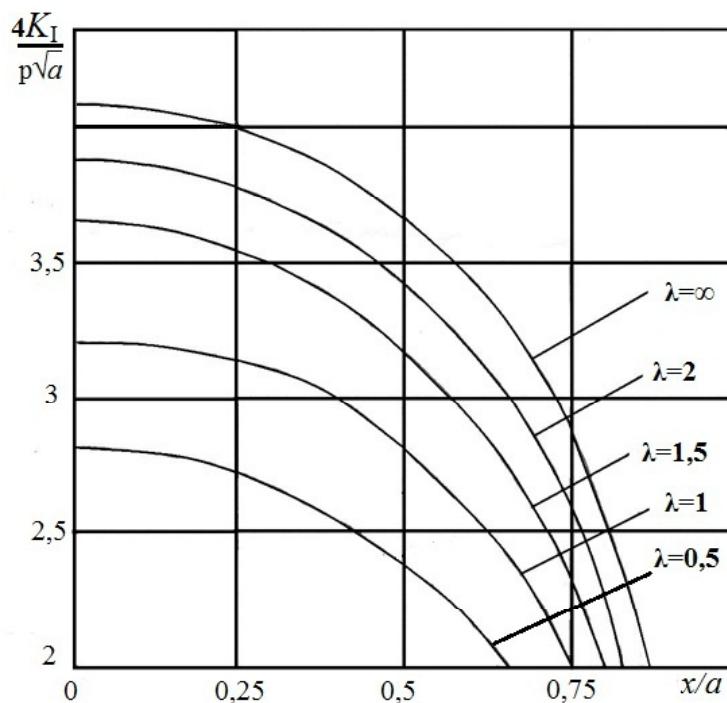


Рис. 3. Изменение коэффициента интенсивности нормальных напряжений для случая трещины квадратной формы ($b = a$)

Таблица 2

Приведённые значения функции раскрытия вдоль лучей, выходящих из угловой точки прямоугольной трещины ($b/a = 0,5$)

1			λ	2		
$a = \pi/4$	$a = \pi/8$	$a = 3\pi/8$	p/a	$a = \pi/4$	$a = \pi/8$	$a = 3\pi/8$
2,38	2,04	2,01	1/16	2,60	2,24	2,21
2,59	2,21	2,18	1/8	2,84	2,48	2,39
2,67	2,29	2,22	3/16	2,92	2,52	2,43
2,66	2,30	2,20	1/4	2,92	2,53	2,41
2,60	2,29	2,14	5/16	2,36	2,53	2,36
2,55	2,24	2,07	3/8	2,80	2,48	2,28
2,42	2,18	1,99	7/16	2,67	2,41	2,19
2,31	2,07	1,90	1/2	2,57	2,33	2,10

Таблица 3

Приведённые значения функции раскрытия вдоль лучей, выходящих из угловой точки квадратной трещины ($b/a = 1$)

1			λ	2	
$a = \pi/4$	$a = \pi/8$	p/a	$a = \pi/4$	$a = \pi/8$	
1,91	2,27	1/16	2,28	2,70	
2,00	2,51	1/8	2,51	3,00	
2,20	2,61	3/16	2,63	3,13	
2,24	2,64	1/4	2,69	3,18	
2,25	2,64	5/16	2,71	3,19	
2,23	2,63	3/8	2,73	3,19	
2,19	2,58	7/16	2,67	3,15	
2,14	2,51	1/2	2,63	3,09	

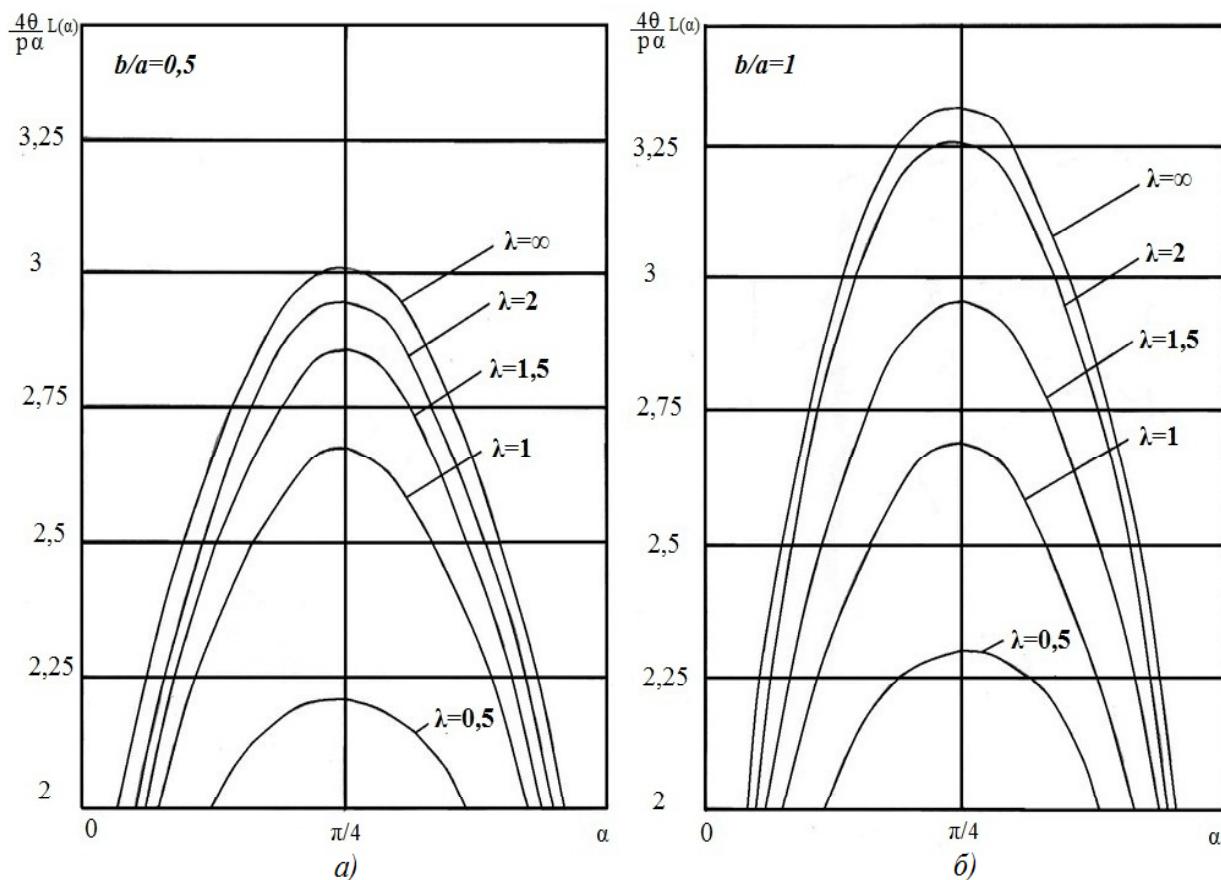


Рис. 4. Изменение множителя $\frac{4\theta_0}{pa} L(a)$ при особенности функции раскрытия трещины в окрестности угловой точки для прямоугольной (а) и квадратной (б) формы трещины

Выводы

1. В результате проведения численного эксперимента установлено, что решение задачи о прямоугольной трещине в упругом слое удовлетворяет принципу сравнения.
2. Коэффициент интенсивности напряжений достигает своего максимального значения при обходе по контуру в окрестности центра длинной стороны прямоугольной области.
3. Установлена симметричность функции раскрытия трещины в окрестности угловой точки контура, независимо от соотношения размеров прямоугольной области.

Библиографический список

1. Sneddon, I. N. The stress intensity factor for a flat elliptical crack in an elastic solid under uniform tension / I. N. Sneddon // Int. J. Eng. Sci. — 1979. — V. 17. — № 2. — p. 92—103.
2. Bazant, Z. Three-dimensional harmonic functions near termination or interaction of gradient singularity lines: A general numerical method / Z. Bazant // Int. J. Eng. Sci. — 1974. — № 12. — p. 221—243.
3. Александров, В. М. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах / В. М. Александров, Б. И. Сметанин, Б. В. Соболь. — Москва: «Физматлит», 1993. — 224 с.
4. Сметанин, Б. И. Равновесие упругого слоя, ослабленного системой плоских трещин / Б. И. Сметанин, Б. В. Соболь // ПММ. — 1984. — Т. 48. — №. 6. — С. 1030—1038.
5. Гольдштейн, Р. В. Качественные методы в механике сплошных сред / Р. В. Гольдштейн, В. М. Енотов. — Москва: Наука, 1989. — С. 110—115.

6. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — Москва: Наука, 1971. — 1108 с.
7. Irvin, G. R. Analysis of stress and strain near the end of a crack, traversing a plate / G. R. Irvin // J. Appl. Mech. — 1957. — № 3. — P. 361—364.
8. Гольдштейн, Р. В. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва / Р. В. Гольдштейн, В. М. Енотов // Изв. АН СССР, МТТ. — № 3. — С. 59—64.
9. Пэррис, П. Анализ напряжённого состояния около трещин / П. Пэррис, Дж. Си // Прикладные вопросы вязкости разрушения. — Москва: Мир. — 1968. — С. 64—142.
10. Мураками, Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. (в 2-х томах) / Ю. Мураками. — Москва: Мир. — 1990. — Т. 1 — 448 с. — Т. 2 — 1014 с.

Материал поступил в редакцию 08.09.2012.

References

1. Sneddon, I. N. The stress intensity factor for a flat elliptical crack in an elastic solid under uniform tension / I. N. Sneddon // Int. J. Eng. Sci. — 1979. — V. 17. — № 2. — p. 92—103.
2. Bazant, Z. Three-dimensional harmonic functions near termination or interaction of gradient singularity lines: A general numerical method / Z. Bazant // Int. J. Eng. Sci. — 1974. — № 12. — p. 221—243.
3. Aleksandrov, V. M. Tonkie koncentratory` napryazhenij v uprugix telax/ V. M. Aleksandrov, B. I. Smetanin, B. V. Sobol` . — Moskva: «Fizmatlit», 1993. — 224 s. — In Russian.
4. Smetanin, B. I. Ravnovesie uprugogo sloya, oslablennogo sistemoj ploskix treshchin / B. I. Smetanin, B. V. Sobol` // PMM. — 1984. — T. 48. — №. 6. — S. 1030—1038. — In Russian.
5. Gol`dshtejn, R. V. Kachestvenny`e metody` v mehanike sploshny`x sred / R. V. Gol`dshtejn, V. M. Enotov. — Moskva: Nauka, 1989. — S. 110—115. — In Russian.
6. Gradshtejn, I. S. Tablitsy` integralov, summ, ryadov i proizvedenij / I. S. Gradshtejn, I. M. Ry`zhik. — Moskva: Nauka, 1971. — 1108 s. — In Russian.
7. Irvin, G. R. Analysis of stress and strain near the end of a crack, traversing a plate / G. R. Irvin // J. Appl. Mech. — 1957. — № 3. — P. 361—364.
8. Gol`dshtejn, R. V. Variacionny`e ocenki dlya koe`fficiente intensivnosti napryazhenij na konture ploskoj treshchiny` normal`nogo razry`va / R. V. Gol`dshtejn, V. M. Enotov // Izv. AN SSSR, MTT. — № 3. — S. 59—64. — In Russian.
9. Pe`ris, P. Analiz napryazhyonnogo sostoyaniya okolo treshchin / P. Pe`ris, Dzh. Si // Prikladny`e voprosy` vyazkosti razrusheniya. — Moskva: Mir. — 1968. — S. 64—142. — In Russian.
10. Murakami, Yu. Spravochnik po koe`fficientam intensivnosti napryazhenij. (v 2-x tomakh) / Yu. Murakami. — Moskva: Mir. — 1990. — T. 1 — 448 s. — T. 2 — 1014 s. — In Russian.

EQUILIBRIUM PLANAR CRACK WITH CONTOUR ANGULAR POINTS IN ELASTIC LAYER

B. V. Sobol, E. V. Rashidova, E. V. Borisova, S. B. Petrenkova
(Don State Technical University)

The three-dimensional static problem of the elasticity theory on the elastic layer balance weakened by a flat rectangular crack is considered. The crack is located in the median layer plane; it is supported open under the normal loading applied to its edges. The layer edges are under the smooth contact with two rigid bases. The problem is converted to the solution of the known singular integro-differential equation concerning the crack opening function through the application of two-dimensional integral Fourier transformation to the equilibrium equation. The equation solution is constructed by the direct variational method. In neighborhood of the contour angular points, the solution completes the construction numerically, with regard for the early distinguished singularity. Values of the direct stress intensity factor in neighborhood of the crack periphery are obtained. The solution behavioral features in neighborhood of the contour rectilinear sites and angular points are established.

Keywords: crack, contour, stress intensity factor, layer, singular integral equation, variational method, force fracture criterion, salient point, neighborhood, layer relative thickness.