

**ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ**

УДК 51:621.891+06

**Математическая модель вязкопластичной смазки подшипников скольжения с деформируемой опорной поверхностью****К. С. Ахвердиев, И. В. Колесников, М. А. Мукутадзе, И. С. Семенко**

(Ростовский государственный университет путей сообщения)

*Даётся метод расчёта радиального подшипника с деформируемой опорной поверхностью на основе аналога уравнения Рейнольдса для вязко-пластичной смазки и уравнения Ламэ для случая «тонкого слоя». Предлагается метод, позволяющий формировать точное автомодельное решение рассматриваемой задачи. Полученные аналитические зависимости позволяют оценить влияние безразмерного параметра пластичности и упругогидродинамического параметра на основные рабочие характеристики подшипника. В результате установлено, что с увеличением значений параметра пластичности и упругогидродинамического параметра, значения несущей способности и силы трения возрастают. В предельном случае, когда упругогидродинамический параметр стремится к бесконечности, значение несущей способности подшипника и сила трения стремятся к соответствующим значениям для подшипника с жёсткой опорной поверхностью. В принятом в работе приближении значение несущей способности и силы трения прямо пропорционально параметру пластичности.*

**Ключевые слова:** опорная поверхность, подшипники скольжения, вязкопластичная смазка, деформация, упругогидродинамический параметр, несущая способность, сила трения.

**Введение.** Как известно, применяемые в настоящее время жидкие смазочные материалы (масла) состоят из масляной основы (базового масла) и композиции присадок, придающих маслам необходимый уровень функциональных свойств [1, 2]. Добавки полимеров с высоким молекулярным весом придают маслам вязкопластичные свойства. Работа подшипников, работающих на вязкопластичных смазках, достаточно изучена [3—6]. Анализ этих работ показывает, что в выполненных исследованиях опорная поверхность подшипников считается абсолютно жёсткой.

В области подшипников с жидкостной плёнкой смазки появилось новое направление подшипников с нежёсткой опорной поверхностью. Жёсткость такой поверхности имеет такой же или даже меньший порядок величины по сравнению с жёсткостью плёнки смазки. Подшипники с нежёсткой поверхностью имеют явные преимущества по сравнению с подшипниками жёсткой опорной поверхностью. Эти преимущества — допустимость больших несоосностей и деформации рабочей поверхности, а также терпимость к присутствию посторонних частиц между рабочими поверхностями. Кроме того, податливость эластомера под действием давления смазки приводит к появлению своего рода губы, ограничивающей утечку сдавливающей смазки из подшипника.

Таким образом, в условиях уменьшенного смазкой питания подшипник с нежёсткой поверхностью может сохранить гидродинамическую или гидростатическую плёнку смазки. В этом отношении он значительно превосходит подшипник с жёсткой опорной поверхностью. Целью данного исследования является оценка рабочих характеристик такого подшипника и, в последующем, сравнение их с хорошо известными характеристиками подшипника такого же типа, но имеющего жёсткую опорную поверхность.

**Постановка задачи.** Рассматривается установившееся движение вязкопластичной смазки в зазоре радиального подшипника с податливой опорной поверхностью. Шип вращается с угловой

скоростью  $\omega$ , а подшипник неподвижен. В полярной системе координат  $(r, \theta)$  с полюсом в центре шипа уравнения шипа и деформированного контура опорной поверхности запишутся в виде

$$r' = r_0, \quad r'' = r_1 + e \cos \theta + a\varphi(\theta).$$

Здесь  $r_0$  — радиус шипа;  $r_1$  — радиус подшипника;  $e$  — эксцентриситет;  $a\varphi(\theta)$  — функция, характеризующая деформацию опорной поверхности подшипника.

При оценке влияния деформации опорной поверхности подшипника на его основные рабочие характеристики ограничимся максимальным значением функции  $a\varphi(\theta)$ . Введём обозначения  $a\varphi(\theta) = a\varphi^*$ ; при  $\theta \in [0, 2\pi]$   $a\varphi^* = \max a\varphi(\theta)$ .

**Основные уравнения и граничные условия.** Будем исходить из безразмерных уравнений движения вязкопластичной смазки для случая «тонкого слоя» и уравнения неразрывности, которые получаются из уравнений Генки-Ильюшина методом оценок

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r'^2} = \frac{dp}{d\theta} + A, \quad \frac{\partial u}{\partial r'} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

Система уравнений (1) решается при следующих граничных условиях

$$u = 0, \quad v = 0 \text{ при } r = 1 + \eta \cos \theta$$

$$u = -1, \quad v = 0 \text{ при } r = 0; \quad p(0) = P(2\pi) = \frac{p_d}{p^*}. \quad (2)$$

Здесь  $\eta = \frac{e}{\delta}$ ;  $\delta = r_1 + a\varphi^* - r_0$ ;  $v_r = \omega \delta v$ ,  $v_\theta = \omega r_0 u$  — компоненты вектора скорости;  $p' = \frac{\mu \omega r_0^2}{\delta^2} p$  —

гидродинамическое давление,  $r' = r_0 + \delta r$ ;  $A = \frac{2\tau_0 \delta^2}{\mu \omega r_1^2}$  — безразмерный параметр, обуславливаю-

щий вязкопластичные свойства смазки;  $p_d$  — давление питания;  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига.

К уравнению (1) необходимо добавить безразмерную систему уравнений Ламэ для «тонкого слоя»

$$\frac{\partial^2 u_{r'}}{\partial r'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r'^2} = 0. \quad (3)$$

Здесь в области занятой упругим слоем размерные величины  $u_{r'}$ ,  $u_\theta$  связаны с безразмерными соотношениями

$$u_{r'} = u^* u_{r''}, \quad u_\theta = u^* u_{\theta'}, \quad r' = r_1 + \delta_1 r'', \quad \delta_1 = r_2 - r_1, \quad (4)$$

где  $u^*$  — характерная величина компонента вектора перемещений;  $r_2 - r_1$  — толщина упругого слоя.

В переменных  $(r, \theta)$  и  $(r^*, \theta)$  уравнение недеформированного контура, прилегающего к смазочному слою, можно записать в виде

$$r = \frac{r_1 - r_0}{\delta} + \eta \cos \theta = h_1(\theta), \quad r^* = \eta_1 \cos \theta = h_2(\theta), \quad \eta = \frac{e}{\delta}, \quad \eta_1 = \frac{e}{\delta_1}. \quad (5)$$

Уравнение деформированного контура и внешнего контура упругого слоя прилегающего к жёсткой поверхности подшипника соответственно запишется в виде

$$r = 1 + \eta \cos \theta = h_3(\theta), \quad r^* = 1 + \eta_1 \cos \theta = h_4(\theta). \quad (6)$$

Система уравнений (3) решается при следующих граничных условиях

$$N \frac{\partial u_\theta}{\partial r^*} \Big|_{r^*=h_2(\theta)} = \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=h_1(\theta)}, \quad M \frac{\partial u_{r'}}{\partial r^*} \Big|_{r^*=h_2(\theta)} = -P, \quad u_\theta \Big|_{r^*=h_4(\theta)} = u_{r'} \Big|_{r^*=h_2(\theta)} = 0,$$

где

$$N = \frac{G_{\tau} u^* \delta}{\mu \omega r_0 \delta_1}; \quad M = \frac{G_{\tau} (1 + \alpha) u^* \delta^2}{(1 - \alpha) \mu \omega r_0^2 \delta_1}; \quad (7)$$

$G_{\tau}$  — модуль сдвига;  $\alpha$  — постоянная Мухелишвили;  $\tilde{p} = \max p$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ;  $p$  — безразмерное гидродинамическое давление в смазочном слое радиального подшипника с жёсткой опорной поверхностью.

Граничные условия (7) означают равенство касательных и нормальных направлений на недеформированной упругой поверхности подшипника, прилегающей к смазочному слою.

Интегрируя первое уравнение смазки (3) с учётом граничных условий (7), будем иметь

$$u_{r'} = -\frac{\tilde{p}}{M} r^* + \frac{\tilde{p}}{M} h_4(\theta) \quad (8)$$

Вспользуемся приближённой формулой

$$|h_3(\theta) - h_1(\theta)| \sim u_{r'}|_{r^*=h_2(\theta)}.$$

С учётом формул (5) и (6) получим

$$\frac{\alpha \Phi^*}{\delta} \approx \frac{\tilde{p}}{M}. \quad (9)$$

Из уравнения (9) с точностью до членов  $O\left(\frac{1}{M^2}\right)$  для  $\alpha \Phi^*$  получим следующее приближённое уравнение

$$\alpha \Phi^* = \frac{\tilde{p}}{M} (r_1 - r_0). \quad (10)$$

Из формулы (10), как и ожидалось, следует, что отношение максимального значения деформации к радиальному зазору прямо пропорционально безразмерному максимальному давлению и обратно пропорционально упругогидродинамическому параметру  $M$ . При  $M \rightarrow \infty$   $\alpha \Phi^* \rightarrow 0$ .

Точное автомодельное решение задачи (1)–(2) будем искать в виде

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial r} + (r, \theta), \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + V(r, \theta), \quad \Psi = \tilde{\Psi}(\xi), \quad U = \tilde{u}(\xi), \\ V = \tilde{v}(\xi) h'(\theta), \quad \xi = \frac{r}{h_1}, \quad \frac{dp}{d\theta} + A = \frac{\tilde{c}_1}{h_3^2} + \frac{\tilde{c}_2}{h_3^3}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (1) и (2) придём к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий к ним

$$\tilde{\Psi}''' = \tilde{c}_2, \quad \tilde{u}'' = \tilde{c}_1, \quad \tilde{v}' - \xi \tilde{u}' = 0 \quad (12)$$

$$\Psi'(0) = 0; \quad \tilde{\Psi}'(0) = 0, \quad \tilde{u}(0) = -1, \quad u(1) = 0, \quad \tilde{v}(0) = 0, \quad \tilde{v}(1) = 0; \quad \int_0^1 \tilde{u}(\xi) d\xi = 0. \quad (13)$$

Решение задачи (12)–(13) легко находится непосредственным интегрированием. В результате будем иметь

$$\tilde{\Psi} = \frac{\tilde{c}_2}{2} (\xi^2 - \xi), \quad \tilde{u}(\xi) = \tilde{c}_1 \frac{\xi^2}{2} - \left( \frac{\tilde{c}_1}{2} - 1 \right) \xi - 1, \quad (14)$$

где  $\tilde{c}_1 = -6$ , константа  $\tilde{c}_2$  в дальнейшем определяется из условия  $P(0) = P(2\pi)$ .

Гидродинамическое давление с учётом (14) определяется из последнего уравнения системы (11). С точностью до членов  $O(\eta^3)$  для определения  $P$  приходим к уравнению

$$\frac{dP}{d\theta} + A = -6 \left( 1 - 2\eta \cos \theta + \frac{3}{2}\eta^2 + \frac{3\eta^2}{2} \cos 2\theta \right) + \tilde{c}_2 (1 - 3\eta \cos \theta + 3\eta^2 + 3\eta^2 \cos 2\theta) \quad (15)$$

Из условия периодичности гидродинамического давления в принятом нами приближении для константы  $\tilde{c}_2$  получим следующее выражение

$$\tilde{c}_2 = A + 6 - 3A\eta^2 - 9\eta^2 \quad (16)$$

Интегрируя (15) с учётом (16) будем иметь

$$p = -6\eta \sin \theta - 3A\eta \sin \theta + 9\eta^2 \sin 2\theta + \frac{3A}{2}\eta^2 \sin 2\theta + \frac{p_A}{p^*} \quad (17)$$

где  $\bar{p} = p(\theta)$  при  $\theta = \theta_1$ , где  $\theta_1$  является корнем уравнения

$$-6\tilde{\eta} \cos \theta_1 - 3A\tilde{\eta} \cos \theta_1 + 18\tilde{\eta}^2 \cos 2\theta_1 + 3A\tilde{\eta}^2 \cos 2\theta_1 = 0, \quad \tilde{\eta} = e/(r_1 - r_0). \quad (18)$$

Перейдём к определению безразмерной несущей способности и безразмерной силы трения. С учётом формул (14) и (17) для  $\tilde{R}_y$  — безразмерной составляющей несущей способности и безразмерной силы трения получим следующие выражения

$$\begin{aligned} \tilde{R}_y &= \frac{R_y}{r_0 p^*} = -\int_0^{2\pi} P \sin \theta d\theta = 6\eta\pi + 3A\eta\pi \\ \tilde{L}_{тр} &= \frac{\tilde{L}_{тр}}{\mu\omega r_0} = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\Psi''(\theta)}{h_3^2(\theta)} + \frac{\tilde{u}'(\theta)}{h_3(\theta)} \right) d\theta = 2\pi + 4\eta^2\pi - A\pi + \frac{3}{2}A\pi\eta^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Численный анализ аналитических выражений (19) с учётом (17) и (18) проводился при следующих значениях параметров

$$A = 0,6; \quad r_1 - r_0 = 0,04 \text{ мм}; \quad \frac{e}{r_1 - r_0} = 0,02 = \tilde{\eta}; \quad M \rightarrow 10^2, 10^3, 10^4, 10^5; \quad 0 < M < 10^5.$$

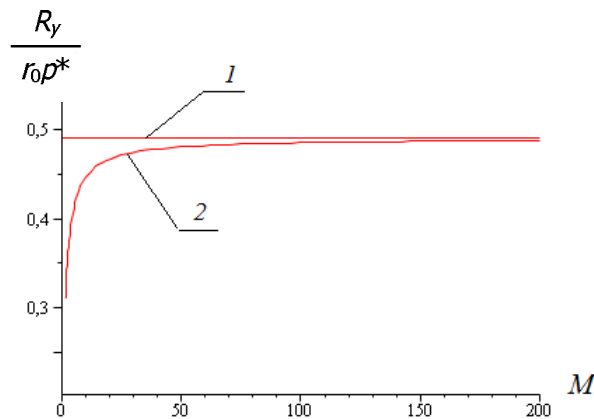


Рис. 1. Зависимость безразмерной несущей способности от параметра  $M$ : 1 —  $\alpha_f^* = 0, A = 0,6$ ; 2 —  $\alpha_f^* \neq 0, A = 0,6$

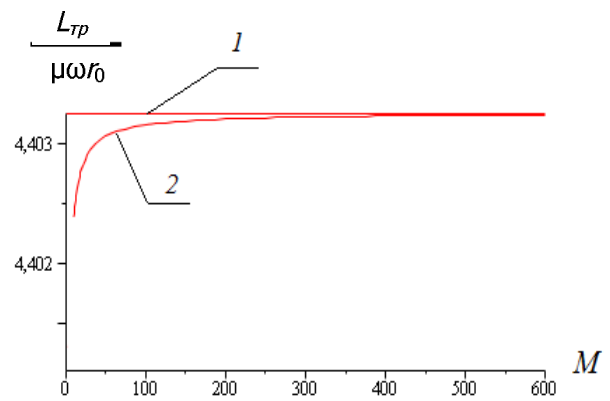


Рис. 2. Зависимость безразмерной силы трения от параметра  $M$ : 1 —  $\alpha_f^* = 0, A = 0,6$ ; 2 —  $\alpha_f^* \neq 0, A = 0,6$

**Выводы.** Из полученных выражений (19) и зависимостей, приведённых на рис. 1 и 2, следует, что:

1. Значение несущей способности и силы трения подшипника с податливой опорной поверхностью меньше, чем у такого же подшипника с жёсткой опорной поверхностью.

2. С увеличением значения упругогидродинамического параметра  $M$ , значение несущей способности и силы трения подшипника возрастает. При  $M \rightarrow \infty$  несущая способность подшипника и сила трения стремятся к соответствующему значению для случая подшипника с жёсткой опорной поверхностью.

3. В принятом в работе приближении значение несущей способности и силы трения прямо пропорционально параметру пластичности  $A$ .

**Библиографический список**

1. Тзунг Ен На. О сдавливании плёнки неньютоновской жидкости / Тзунг Ен На // Теоретические основы инженерных расчётов. — 1966. — № 3. — С. 168.
2. Кристенсен, Р. Введение в теорию вязкоупругости. — Москва : Машиностроение, 1974. — 333 с.
3. Ахвердиев, К. С. Нелинейная задача о неустановившемся движении вязкопластичной жидкости между шипом и подшипником // Доклады АН АзССР. — 1977. — Т. 33, № 11. — С. 19–25.
4. Ахвердиев, К. С. Нелинейные эффекты воздействия вязкопластичной смазки на шип подшипника скольжения // Доклады АН АзССР. — 1977. — Т. 34, № 12. — С. 30–35.
5. Ахвердиев, К. С. О движении вязкопластичной смазки в подшипнике // Доклады АН АзССР. — 1977. — Т. 33, № 3. — С. 7–13.
6. Ахвердиев, К. С. Нелинейные эффекты воздействия вязкопластичной смазки на устойчивость движения шипа в подшипнике // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 1978. — № 5. — С. 86–92.

Материал поступил в редакцию 27.01.2012.

**References**

1. Tsung Yen Na. The Non-Newtonian Squeeze Film. *J. Basic Engineering*. 1966, vol. 88, iss. 3, p. 687.
2. Kristensen, R. *Vvedeniye v teoriyu vyazkouprugosti*. [Introduction to viscoelasticity theory.] Moscow: Mashinostroyeniye, 1974, 333 p. (in Russian).
3. Akhverdiyev, K.S. *Nelineynaya zadacha o neustanovivshemsya dvizhenii vyazkoplastichnoy zhidkosti mezhdru shipom i podshipnikom*. [Nonlinear problem on viscoplastic fluid nonsteady flow between nib and bearing.] *Doklady AN AzSSR*, 1977, vol. 33, no. 11, pp. 19–25 (in Russian).
4. Akhverdiyev, K.S. *Nelineynyye efekty vozdeystviya vyazkoplastichnoy smazki na ship podshipnika skolzheniya*. [Nonlinear effects of viscoplastic lubricant on friction bearing nib.] *Doklady AN AzSSR*, 1977, vol. 34, no. 12, pp. 30–35 (in Russian).
5. Akhverdiyev, K.S. *O dvizhenii vyazkoplastichnoy smazki v podshipnike*. [On viscoplastic lubricant motion in bearing.] *Doklady AN AzSSR*, 1977, vol. 33, no. 3, pp. 7–13 (in Russian).
6. Akhverdiyev, K.S. *Nelineynyye efekty vozdeystviya yazkoplastichnoy smazki na ustoychivost dvizheniya shipa v podshipnike*. [Nonlinear viscoplastic lubricant effects on nib dynamical stability in bearing.] *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 1978, no. 5, pp. 86–92 (in Russian).

**MATHEMATICAL MODEL OF VISCOPLASTIC LUBRICATION OF FRICTION BEARING WITH DEFORMABLE BASE**

**K. S. Akhverdiyev, I. V. Kolesnikov, M. A. Mukutadze, I. S. Semenko**  
(Rostov State Transport University)

*The analysis technique of the radial bearing with a deformable base on the ground of Reynolds equation analog for viscoplastic lubrication, and of Lamé equation for 'thin layer' case is given. The technique permitting to form the accurate self-similar solution to the problem considered is offered. The obtained analytical dependences allow estimating the effects of the nondimensional plasticity parameter and the elastic hydrodynamic parameter on the bearing principle operation factors. The results show that the bearing capacity and the frictional force values grow with the increase of plasticity parameter and the elastic hydrodynamic parameter values. In the limiting case when the elastic hydrodynamic parameter goes to infinity, the bearing capacity value and the frictional force go to the proper values for the bearing with a rigid base. In the admitted approximation, the bearing capacity and the frictional force value are directly proportional to the plasticity parameter.*

**Keywords:** bearing surface, friction bearings, viscoplastic lubrication, deformation, elastic hydrodynamic parameter, bearing capacity, frictional force.