

## МЕХАНИКА MECHANICS



УДК 519.6

<https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-4-12>

### Исследование стационарных решений задачи динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния \*

Ю. В. Белова<sup>1</sup>, А. М. Атаян<sup>2</sup>, А. Е. Чистяков<sup>3</sup>, А. В. Стражко<sup>4\*\*</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация

### Study on stationary solutions to the problem of phytoplankton dynamics considering transformation of phosphorus, nitrogen and silicon compounds \*\*\*

Yu.V. Belova<sup>1</sup>, A.M. Atayan<sup>2</sup>, A.E. Chistyakov<sup>3</sup>, A.V. Strazhko<sup>4\*\*</sup>

<sup>1,2,3,4</sup> Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

*Введение.* Работа посвящена исследованию решения задачи трансформации форм фосфора, азота и кремния. Данная проблема возникает при моделировании динамики фитопланктона в мелководных водоемах, в том числе в Азовском море. Модель динамики фитопланктона сформулирована как краевая задача для системы уравнений диффузии-конвекции-реакции и учитывает поглощение и выделение питательных веществ фитопланктоном, а также переход питательных веществ из одного соединения в другое. Для расчета начальных условий и параметров уравнений, при которых наступает стационарный режим, разработано программное обеспечение, основой которого послужила модель, описывающая изменения концентраций фитопланктона без учета влияния течений. Данная модель представлена системой неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений. На основе разработанного программного обеспечения экспериментальным образом рассчитаны начальные условия и параметры модели динамики фитопланктона в Азовском море.

*Материалы и методы.* Рассматривается трехмерная модель динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния, основанная на системе уравнений транспорта биогенных веществ. Для уточнения параметров модели, при которых наступают стационарные режимы, рассматривается случай пространственно-однородного распределения субстанций. В результате упрощения получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решена методом Рунге-Кутты.

*Результаты исследования.* Разработано программное обеспечение для уточнения начальных условий и параметров модели динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния. Проведены несколько численных экспериментов в предположении, что развитие фитопланктона лимитируется единственным биогенным веществом. В результате вычисли-

*Introduction.* The solution to the problem of transformation of phosphorus, nitrogen and silicon forms is studied. This problem arises under modeling phytoplankton dynamics in shallow-water bodies including the Azov Sea. The phytoplankton dynamics model is formulated as a boundary value problem for the system of diffusion-convection-response equations and takes into account the absorption and release of nutrients by phytoplankton, as well as the transition of nutrients from one compound to another. To calculate the initial conditions and parameters of the equations under which the steady-state regime occurs, the software is developed, which is based on the model describing changes in phytoplankton concentrations without considering current effects. This model is represented by a system of inhomogeneous differential equations. Based on the developed software, the initial conditions and parameters of the phytoplankton dynamics model in the Azov Sea are calculated experimentally.

*Materials and Methods.* A 3D model of phytoplankton dynamics is considered taking into account the transformation of phosphorus, nitrogen and silicon compounds based on the system of nutrient transport equations. The case of a spatially uniform distribution of substances is considered to specify the parameters of the model at which the stationary modes occur. Because of simplification, a system of ordinary differential equations solved through the Runge-Kutta method is obtained.

*Research Results.* The software is developed to specify the initial conditions and parameters of the phytoplankton dynamics model considering the transformation of phosphorus, nitrogen and silicon compounds.

Several numerical experiments are performed under the assumption that the development of phytoplankton is limited by a single biogenic substance. As a result of the computational experiment, it can be seen that with the obtained values of the



\* Работа выполнена при поддержке РНФ (проект № 17-11-01286).

\*\* E-mail: yvbelova@yandex.ru, atayan24@yandex.ru, cheese\_05@mail.ru, strajcko2@gmail.com

\*\*\* The research is supported by the RSF (project no. 17-11-01286).

тельного эксперимента видно, что при полученных значениях начальных концентраций и параметров уравнений наступают стационарные режимы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей случай пространственно-равномерного распределения субстанций.

*Обсуждение и заключения.* В работе исследована математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в задаче динамики фитопланктона.

Получены стационарные режимы для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых определены значения параметров системы и начальные условия. Полученные результаты могут быть использованы в процессе дальнейшего моделирования динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния с учетом конвекции-диффузии, солёности, температуры.

**Ключевые слова:** фитопланктон, фосфор, азот, кремний, биоген, химико-биологический источник, уравнение конвекции-диффузии-реакции, задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, стационарный режим.

**Образец для цитирования.** Белова, Ю. В. Исследование стационарных решений задачи динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния / Ю. В. Белова [и др.] // Вестник Донского гос. техн. ун-та. — 2019. — Т.19, №1. — С. 4–12. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-4-12>

**Введение.** В связи с развитием крупных городов на побережье мелководных водоемов и речных систем, впадающих в данные водоемы, участились случаи эвтрофикации. Рост водорослей в водоемах вызван увеличением стока азотных и фосфорных соединений с прилегающих районов суши. Каждый водный объект является уникальным и требует подробного исследования. Для изучения водоемов прибегают к натурным исследованиям [1], а также математическому моделированию. Не преуменьшая роли натуральных экспериментов можно сказать, что математическое моделирование является менее затратным, а также позволяет прогнозировать поведение экосистемы.

Для изучения Азовского моря разработана трехмерная модель гидродинамики [2, 3], включающая уравнения движения по трем пространственным направлениям. В работе [4] данная модель выполнена для случая динамического перестроения геометрии расчетной области за счет приливно-отливных явлений. Исследование точности данной модели приведено в работе [5]. В работах [6–8] приведена реконструкция экологической катастрофы, произошедшей в 2001 году, вызванной чрезмерной концентрацией водорослей в восточной части Азовского моря. В работе [9] предложены методы борьбы с заморными явлениями, возникающими в Азовском море. Работы [10–12] посвящены изучению динамики фито- и зоопланктона.

Состояние вод в мелководных водоемах быстро меняется и математические модели требуют уточнения. Расчет параметров трехмерной модели динамики фито- и зоопланктона является трудоемким, поэтому предлагается для расчета данных параметров использовать упрощенную модель.

Цель данной работы состоит в уточнении параметров модели динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния, при которых наступают стационарные режимы в предположении пространственно-однородного распределения субстанций.

**Материалы и методы.** Модель основана на системе уравнений транспорта биогенных веществ [15, 16], вид которой для каждого модельного блока  $F_i$  имеет вид

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + u \frac{\partial q_i}{\partial x} + v \frac{\partial q_i}{\partial y} + w \frac{\partial q_i}{\partial z} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} q_i) + R_{q_i}, \quad (1)$$

initial concentrations and parameters of the equations, stationary modes occur for the system of ordinary differential equations describing the case of the spatially uniform distribution of substances.

*Discussion and Conclusions.* The mathematical model of the transformation of phosphorus, nitrogen and silicon forms in the problem of phytoplankton dynamics is studied. Stationary modes for the system of ordinary differential equations are obtained, for which the values of the system parameters and initial conditions are determined. The results obtained can be used in further simulation of the phytoplankton dynamics considering the transformation of phosphorus, nitrogen and silicon compounds with account for convection-diffusion, salinity, and temperature.

**Keywords:** phytoplankton, phosphorus, nitrogen, silicon, biogen, chemical-biological source, convection-diffusion-response equation, Cauchy problem for system of ordinary differential equations, stationary mode.

**For citation:** Yu.V. Belova, et al. Study of stationary solutions to the problem of phytoplankton dynamics considering transformation of phosphorus, nitrogen and silicon compounds. Vestnik of DSTU, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 4–12. <https://doi.org/10.23947/1992-5980-2019-19-1-4-12>

где  $q_i$  — концентрация  $i$ -ой компоненты, [мг/л];  $i \in M$ ,  $M = \{F_1, F_2, F_3, PO_4, POP, DOP, NO_3, NO_2, NH_4, Si\}$ ;  $\{u, v, w\}$  — компоненты вектора скорости водного потока, [м/с];  $k$  - коэффициент турбулентного обмена, [м<sup>2</sup>/с];  $R_{q_i}$  — функция-источник биогенных веществ, [мг/л·с].

В уравнении (1) индекс  $i$  указывает на вид субстанции (таблица 1).

Таблица 1

Биогенные вещества в модели динамики фитопланктона

Номер	Обозначение	Название
1	F <sub>1</sub>	зеленая водоросль <i>Chlorella vulgaris</i>
2	F <sub>2</sub>	синезеленая водоросль <i>Aphanizomenon flos-aquae</i>
3	F <sub>3</sub>	диатомовая водоросль <i>Skeletonema costatum</i>
4	PO <sub>4</sub>	фосфаты
5	POP	взвешенный органический фосфор
6	DOP	растворенный органический фосфор
7	NO <sub>3</sub>	нитраты
8	NO <sub>2</sub>	нитриты
9	NH <sub>4</sub>	аммоний
10	Si	растворенный неорганический кремний (кремниевые кислоты)

Химико-биологические реакции описаны следующими уравнениями

$$\begin{aligned}
 R_{F_i} &= C_{F_i} (1 - K_{F,R}) q_{F_i} - K_{F,D} q_{F_i} - K_{F,E} q_{F_i}, \quad i = \overline{1, 3}, \\
 R_{POP} &= \sum_{i=1}^3 s_P K_{F,D} q_{F_i} - K_{PD} q_{POP} - K_{PN} q_{POP}, \\
 R_{DOP} &= \sum_{i=1}^3 s_P K_{F,E} q_{F_i} + K_{PD} q_{POP} - K_{DN} q_{DOP}, \\
 R_{PO_4} &= \sum_{i=1}^3 s_P C_{F_i} (K_{F,R} - 1) q_{F_i} + K_{PN} q_{POP} + K_{DN} q_{DOP}, \\
 R_{NH_4} &= \sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (K_{F,R} - 1) \frac{f_N^{(2)}(q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} q_{F_i} + \sum_{i=1}^3 s_N (K_{F,D} + K_{F,E}) q_{F_i} - K_{42} q_{NH_4}, \\
 R_{NO_2} &= \sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (K_{F,R} - 1) \frac{f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} \cdot \frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{F_i} + K_{42} q_{NH_4} - K_{23} q_{NO_2}, \\
 R_{NO_3} &= \sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (K_{F,R} - 1) \frac{f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})}{f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4})} \cdot \frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{F_i} + K_{23} q_{NO_2}, \\
 R_{Si} &= s_{Si} C_{F_3} (K_{F,R} - 1) q_{F_3} + s_{Si} K_{F_3,D} q_{F_3}.
 \end{aligned}$$

Здесь  $K_{F,R}$  — удельная скорость дыхания фитопланктона;  $K_{F,D}$  — удельная скорость отмирания фитопланктона;  $K_{F,E}$  — удельная скорость экскреции фитопланктона;  $K_{PD}$  — удельная скорость автолиза *POP*;  $K_{PN}$  — коэффициент фосфатификации *POP*;  $K_{DN}$  — коэффициент фосфатификации *DOP*;  $K_{42}$  — удельная скорость окисления аммония до нитритов в процессе нитрификации;  $K_{23}$  — удельная скорость окисления нитритов до нитратов в процессе нитрификации,  $s_P, s_N, s_{Si}$  — нормировочные коэффициенты между содержанием  $N, P, Si$  в органическом веществе.

Скорость роста фитопланктона определяется выражениями:

$$\begin{aligned}
 C_{F_{1,2}} &= K_{NF_{1,2}} \min \{ f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) \}, \\
 C_{F_3} &= K_{NF_3} \min \{ f_P(q_{PO_4}), f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}), f_{Si}(q_{Si}) \},
 \end{aligned}$$

где  $K_{NF}$  — максимальная удельная скорость роста фитопланктона.

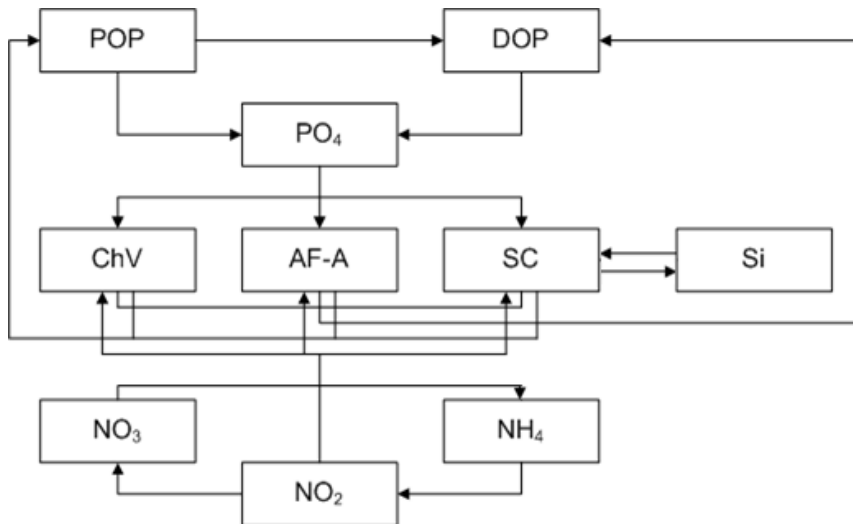


Рис. 1. Модельная схема биогеохимической трансформации форм фосфора, азота и кремния

Функции, описывающие содержания биогенов

– для фосфора  $f_P(q_{PO_4}) = \frac{q_{PO_4}}{q_{PO_4} + K_{PO_4}}$ ,

где  $K_{PO_4}$  — константа полунасыщения фосфатами;

– для кремния  $f_{Si}(q_{Si}) = \frac{q_{Si}}{q_{Si} + K_{Si}}$ ,

где  $K_{Si}$  — константа полунасыщения кремнием;

– для азота  $f_N(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) = f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) + f_N^{(2)}(q_{NH_4})$ ,

$$f_N^{(1)}(q_{NO_3}, q_{NO_2}, q_{NH_4}) = \frac{(q_{NO_3} + q_{NO_2}) \exp(-K_{psi} q_{NH_4})}{K_{NO_3} + (q_{NO_3} + q_{NO_2})}, \quad f_N^{(2)}(q_{NH_4}) = \frac{q_{NH_4}}{K_{NH_4} + q_{NH_4}},$$

где  $K_{NO_3}$  — константа полунасыщения нитратами,  $K_{NH_4}$  — константа полунасыщения аммонием,  $K_{psi}$  — коэффициент ингибирования аммония.

Для системы (1) необходимо задать векторное поле скоростей водного потока, а также начальные значения функций концентраций  $q_i$

$$q_i(x, y, z, 0) = q_i^0(x, y, z), (x, y, z) \in \bar{G}, t = 0, i \in M. \quad (2)$$

Будем считать, что граница  $\Sigma$  цилиндрической области  $G$  является кусочно-гладкой и  $\Sigma = \Sigma_H \cup \Sigma_o \cup \sigma$ , где  $\Sigma_H$  — поверхность дна водоема,  $\Sigma_o$  — невозмущенная поверхность водной среды,  $\sigma$  — боковая (цилиндрическая) поверхность. Пусть  $u_n$  — нормальная по отношению к  $\Sigma$  составляющая вектора скорости водного потока,  $n$  — вектор внешней нормали к  $\Sigma$ . Для концентраций  $q_i$  будем предполагать:

– на боковой границе:

$$q_i = 0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n < 0, i \in M; \quad (3)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial n} = 0, \text{ на } \sigma, \text{ если } u_n \geq 0, i \in M; \quad (4)$$

– на  $\Sigma_o$  — поверхность водоема:

$$\frac{\partial q_i}{\partial z} = 0, i \in M; \quad (5)$$

– на дне  $\Sigma_H$ :

$$k \frac{\partial q_i}{\partial z} = \varepsilon_{1,i} q_i, \quad i \in \{F_1, F_2, F_3\},$$

$$k \frac{\partial q_i}{\partial z} = \varepsilon_{2,i} q_i, \quad i \in \{PO_4, POP, DOP, NO_3, NO_2, NH_4, Si\}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{1,i}, \varepsilon_{2,i}$  — скорости осаждения водорослей и питательных веществ на дно.

**Стационарный режим.** Рассмотрим случай пространственно-равномерного распределения субстанций (фитопланктона, форм фосфора, азота и кремния), тогда каждое из уравнений (1) упрощается и в результате получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$\begin{aligned} \frac{dq_{F_i}}{dt} &= C_{F_i} (1 - K_{F,R}) q_{F_i} - K_{F,D} q_{F_i} - K_{F,E} q_{F_i}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (7) \\ \frac{dq_{POP}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 s_P K_{F,D} q_{F_i} - K_{PD} q_{POP} - K_{PN} q_{POP}, \\ \frac{dq_{DOP}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 s_P K_{F,E} q_{F_i} + K_{PD} q_{POP} - K_{DN} q_{DOP}, \\ \frac{dq_{PO_4}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 s_P C_{F_i} (K_{F,R} - 1) q_{F_i} + K_{PN} q_{POP} + K_{DN} q_{DOP}, \\ \frac{dq_{NH_4}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (K_{F,R} - 1) \frac{f_N^{(2)}(NH_4)}{f_N(NO_3, NO_2, NH_4)} q_{F_i} + \sum_{i=1}^3 s_N (K_{F,D} + K_{F,E}) q_{F_i} - K_{42} q_{NH_4}, \\ \frac{dq_{NO_2}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (K_{F,R} - 1) \frac{f_N^{(1)}(NO_3, NO_2, NH_4)}{f_N(NO_3, NO_2, NH_4)} \cdot \frac{q_{NO_2}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{F_i} + K_{42} q_{NH_4} - K_{23} q_{NO_2}, \\ \frac{dq_{NO_3}}{dt} &= \sum_{i=1}^3 s_N C_{F_i} (K_{F,R} - 1) \frac{f_N^{(1)}(NO_3, NO_2, NH_4)}{f_N(NO_3, NO_2, NH_4)} \cdot \frac{q_{NO_3}}{q_{NO_2} + q_{NO_3}} q_{F_i} + K_{23} q_{NO_2}, \\ \frac{dq_{Si}}{dt} &= s_{Si} C_{F_3} (K_{F,R} - 1) q_{F_3} + s_{Si} K_{F,D} q_{F_3}. \end{aligned}$$

Решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты [15–17]. Проведем несколько численных экспериментов, предполагая, что развитие фитопланктона зависит от единственного лимитирующего вещества.

**Результаты исследования.** Для системы ОДУ (7) рассчитаем начальные условия и параметры уравнений, при которых наступают стационарные режимы. Возьмем начальные значения концентраций:  $q_{F_1}(0) = 2,5$  мг/л,  $q_{F_2}(0) = 2,6$  мг/л,  $q_{F_3}(0) = 0,91$  мг/л,  $q_{POP}(0) = 0,07$  мг/л,  $q_{DOP}(0) = 0,07$  мг/л,  $q_{PO_4}(0) = 0,005$  мг/л,  $q_{NH_4}(0) = 0,11$  мг/л,  $q_{NO_2}(0) = 0,0178$  мг/л,  $q_{NO_3}(0) = 0,304$  мг/л,  $q_{Si}(0) = 0,4$  мг/л; коэффициенты:  $K_{NF_i} = 2,8$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{F,R} = 0,15$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{F,D} = 0,05$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{F,E} = 0,15$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{PD} = 0,015$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{PN} = 0,02$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{DN} = 0,1$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{42} = 0,9$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{23} = 2,5$  сут<sup>-1</sup>,  $K_{psi} = 1,46$  сут<sup>-1</sup>,  $s_P = 0,01$ ,  $s_N = 0,016$ ,  $s_{Si} = 0,023$ ,  $K_{PO_4} = 0,024$ ,  $K_{NO_3} = 3,0$ ,  $K_{NH_4} = 2,0$ ,  $K_{Si} = 3,0$ .

Полученные стационарные режимы системы ОДУ (7) в предположении, что развитие фитопланктона лимитируется единственным биогенным веществом — фосфором, азотом или кремнием — изображены на рис. 2–4 соответственно. Рис. 2 описывает влияние фосфора на развитие различных видов фитопланктона, рис. 3 описывает влияние азота на развитие различных видов фитопланктона, рис. 4 описывает влияние азота на развитие диатомовых водорослей.

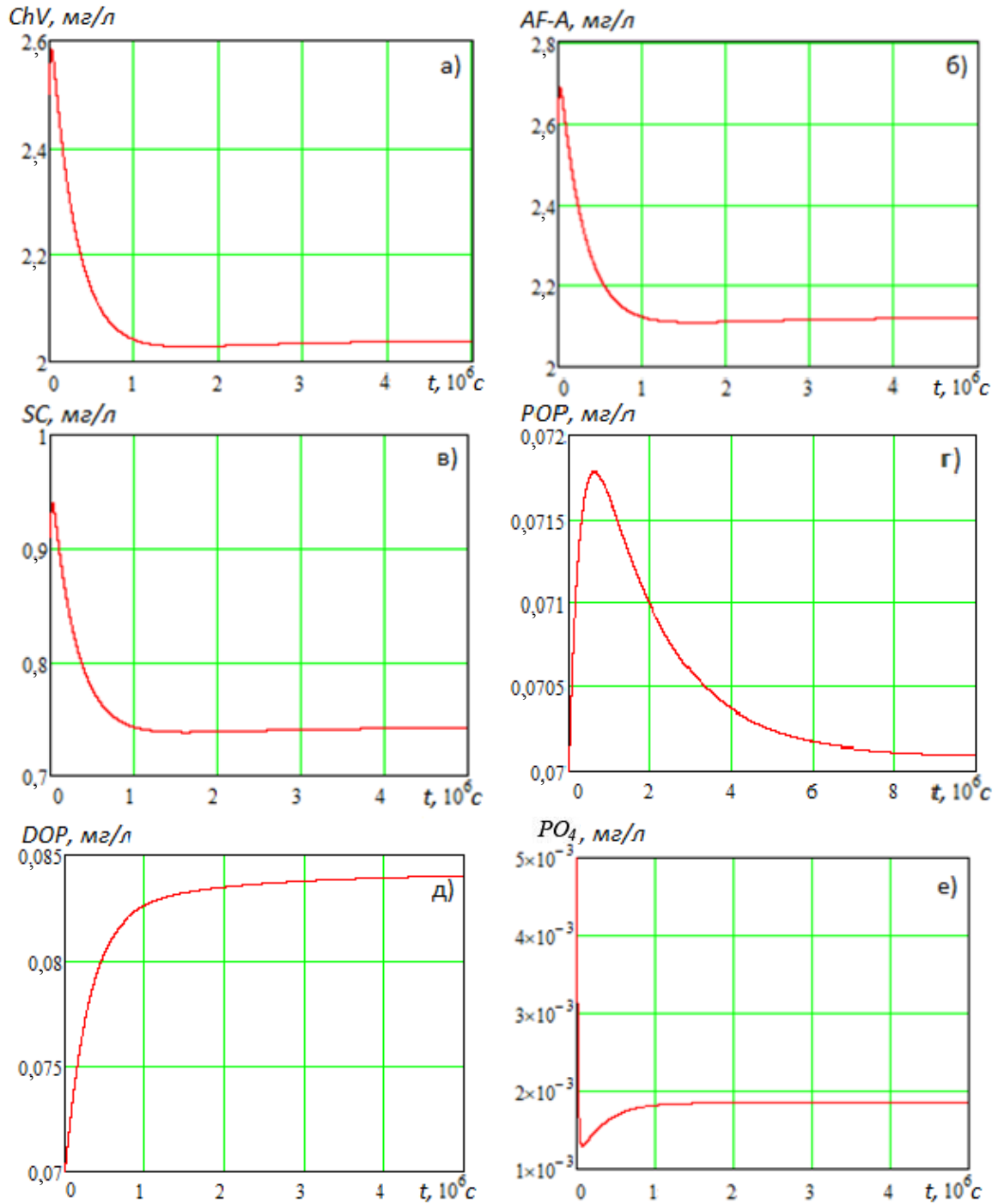


Рис. 2. Стационарный режим системы ОДУ в предположении, что развитие фитопланктона лимитируется фосфором: а) зеленая водоросль ( $ChV$ ), б) синезеленая водоросль ( $AF-A$ ), в) диатомовая водоросль ( $SC$ ), г) взвешенный органический фосфор ( $POP$ ), д) растворенный органический фосфор ( $DOP$ ), е) фосфаты ( $PO_4$ )

В результате вычислительного эксперимента видно, что при указанных выше значениях начальных концентраций и параметров уравнений наступают стационарные режимы для системы ОДУ (7), описывающей случай пространственно-равномерного распределения субстанций. Полученные значения в дальнейшем будут использованы для моделирования пространственно-неоднородного распределения субстанций, солености и температуры с учетом движения водной среды [18].

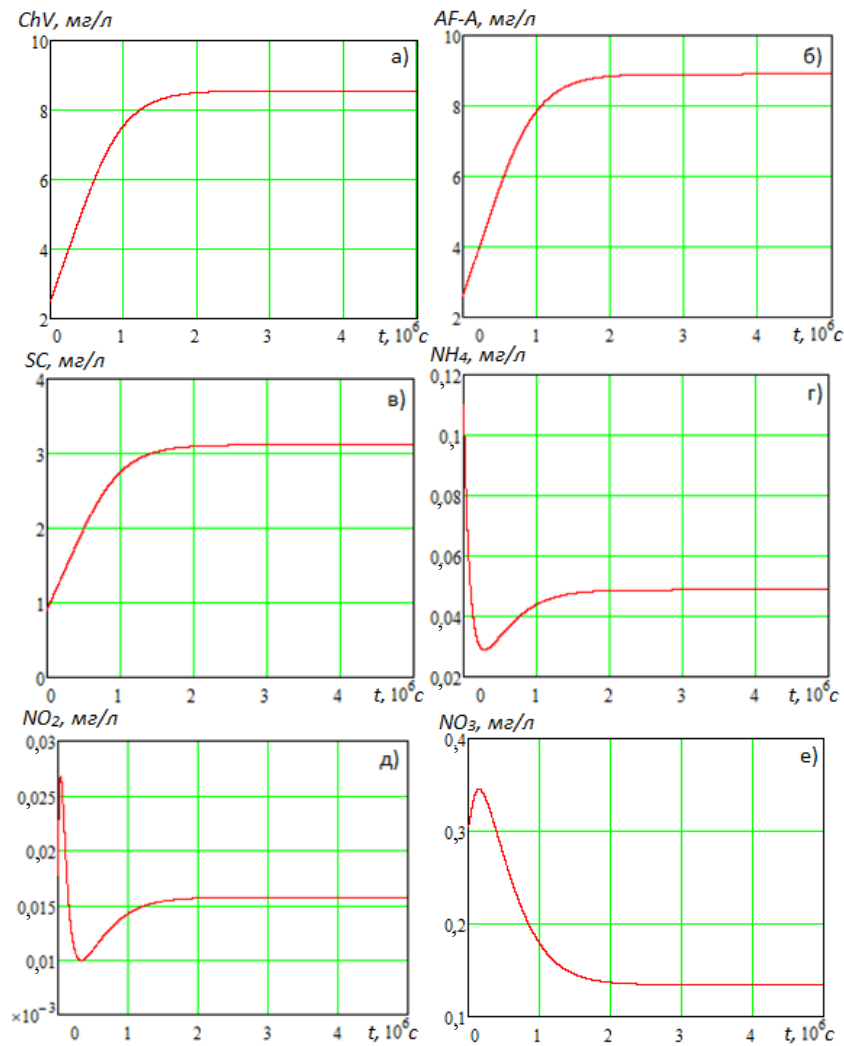


Рис. 3. Стационарный режим системы ОДУ в предположении, что развитие фитопланктона лимитируется азотом: а) зеленая водоросль ( $ChV$ ), б) синезеленая водоросль ( $AF-A$ ), в) диатомовая водоросль ( $SC$ ), г) аммоний ( $NH_4$ ), д) нитриты ( $NO_2$ ), е) нитраты ( $NO_3$ )

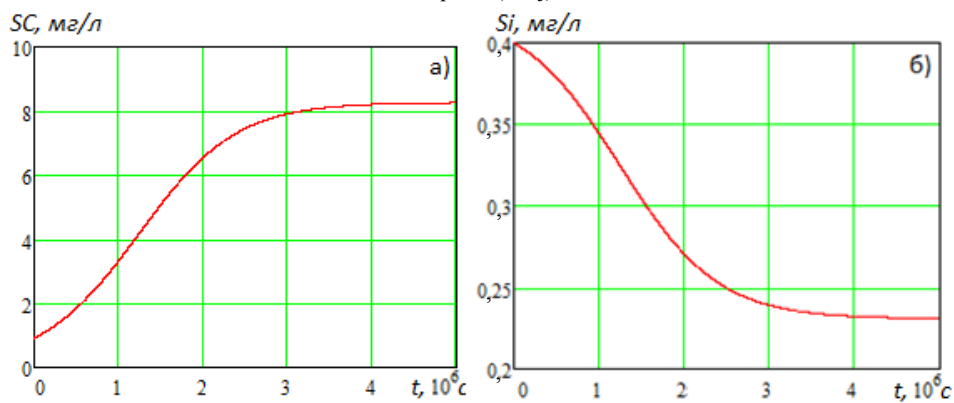


Рис. 4. Стационарный режим системы ОДУ в предположении, что развитие фитопланктона (диатомовых водорослей) лимитируется кремнием: а) диатомовая водоросль ( $SC$ ), б) кремний ( $Si$ )

**Заключение.** В данной работе исследована математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в задаче динамики фитопланктона. Рассмотрен случай пространственно-равномерного распределения субстанций (фитопланктона, форм фосфора, азота и кремния). Система разбивается на три системы обыкновенных дифференциальных уравнений, каждая из которых моделирует зависимость роста фитопланктона от единственного питательного вещества. Эти системы решены методом Рунге-Кутты, получены стационарные режимы (рис. 2–4), для которых определены значения параметров системы и начальные условия.



Полученные результаты будут использованы для дальнейшего моделирования динамики фитопланктона с учетом трансформации соединений фосфора, азота и кремния с учетом конвекции-диффузии, солености, температуры.

#### Библиографический список

1. Якушев, Е. В. Комплексные океанологические исследования Азовского моря в 28-м рейсе научно-исследовательского судна «Акванавт» / Е. В. Якушев, А. И. Сухинов // *Океанология*. — 2003. — Т. 43. — № 1. — С.44–53.
2. Сухинов, А. И. Численное моделирование экологического состояния Азовского моря с применением схем повышенного порядка точности на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов [и др.] // *Компьютерные исследования и моделирование*. — 2016. — Т. 8. — № 1. — С. 151–168.
3. Sukhinov, A.I., Sukhinov A.A. 3D model of diffusion-advection-aggregation suspensions in a water basins and its parallel realization. *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications* — 2005. — pp. 223–230. DOI: 10.1016/B978-044452024-1/50029-4.
4. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E., Shishenya, A.V., Timofeeva, E.F. Mathematical model for calculating coastal wave processes. *Mathematical Models and Computer Simulations*. — 2013. — Т. 5. — № 2. — pp. 122–129. DOI: 10.1134/S2070048213020087.
5. Сухинов, А. И. Предсказательное моделирование прибрежных гидрофизических процессов на многопроцессорной системе с использованием явных схем / А. И. Сухинов [и др.] // *Математическое моделирование*. — 2018. — Т. 30. — № 3. — С. 83–100.
6. Сухинов, А. И. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов [и др.] // *Вычислительные методы и программирование*. — 2013. — Т. 14. — № 1. — С. 103–112.
7. Sukhinov, A.I., Sukhinov A.A. Reconstruction of 2001 ecological disaster in the Azov sea on the basis of precise hydrophysics models. *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications* — 2005. — pp. 231–238. DOI: 10.1016/B978-044452024-1/50030-0.
8. Debolskaya, E.I., Yakushev, E.V., Sukhinov, A.I. Formation of fish kills and anaerobic conditions in the sea of Azov. *Water Resources*. — 2005. — Т. 32. — № 2. — pp. 151–162. DOI: 10.1007/s11268-005-0020-5.
9. Никитина, А. В. Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря / А. В. Никитина [и др.] // *Математическое моделирование*. — 2016. — Т. 28. — № 7. — С. 96–106.
10. Сухинов, А. И. Математическое моделирование процессов эвтрофикации в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, А.В. Никитина, А.Е. Чистяков // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика*. — 2016. — Т. 5. — № 3. — С. 36–53.
11. Никитина, А. В. Дифференциально-игровая модель предотвращения заморозов в мелководных водоемах / А. В. Никитина, М. В. Пучкин, И. С. Семенов // *Управление большими системами*. — 2015. — Вып. 55. — С. 343–361.
12. Сухинов, А. И. Математическая модель трансформации форм фосфора, азота и кремния в движущейся турбулентной водной среде в задачах динамики планктонных популяций / А. И. Сухинов, Ю. В. Белова // *Инженерный вестник Дона*. — 2015. — Т. 37. — № 3. — С. 50.
13. Дегтярева, Е. Е. Программная реализация трехмерной математической модели транспорта взвеси в мелководных акваториях [Электронный ресурс] / Е. Е. Дегтярева, Е. А. Проценко, А. Е. Чистяков // *Инженерный вестник Дона*. — 2012. — Т. 23. — № 4 — 2. —30 с. — Режим доступа : [ivdon.ru/gu/magazine/archive/n4p2y2012/1283](http://ivdon.ru/gu/magazine/archive/n4p2y2012/1283) (дата обращения : 12.12.2018).
14. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский — Москва : Наука, 1989. — 616 с.
15. Сухинов, А. И. Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина, А. А. Сухинов // *Вестник Донского гос. техн. ун-та*. — 2017. — Т. 17. — № 1 (88). — С. 5–17.
16. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — Москва : Наука, 1978. — 532 с.
17. Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г. И. Марчук. — Москва : Наука, 1982. — 319 с.
18. Белова, Ю. В. О четырехслойной итерационной схеме / Ю. В. Белова, А. Е. Чистяков, У. А. Проценко // *Вестник Донского гос. техн. ун-та*. 2016. — Т.16. — № 4 (87). — С. 146–149.



Поступила в редакцию 20.11.2018  
Сдана в редакцию 21.11.2018  
Запланирована в номер 11.01.2019

Received 20.11.2018  
Submitted 21.12.2018  
Scheduled in the issue 11.01.2019

**Об авторах:**

**Белова Юлия Валериевна,**  
младший научный сотрудник НИИ «Математическое моделирование и прогнозирование сложных систем» Донского государственного технического университета, (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1),  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2639-7451>  
[yvbelova@yandex.ru](mailto:yvbelova@yandex.ru)

**Атаян Ася Михайловна,**  
ассистент кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета, (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1),  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4629-1002>  
[atayan24@yandex.ru](mailto:atayan24@yandex.ru)

**Чистяков Александр Евгеньевич,**  
профессор кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета, (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, профессор,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8323-6005>  
[cheese\\_05@mail.ru](mailto:cheese_05@mail.ru)

**Стражко Александр Валентинович,**  
студент кафедры «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем» Донского государственного технического университета, (РФ, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1),  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2449-8531>  
[strajcko2@gmail.com](mailto:strajcko2@gmail.com)

**Authors:**

**Belova, Yuliya V.,**  
Junior research scholar, Research Institute for Mathematical Modeling and Forecasting of Complex Systems, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344000, RF),  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2639-7451>  
[yvbelova@yandex.ru](mailto:yvbelova@yandex.ru)

**Atayan, Asya M.,**  
teaching assistant of the Computer and Automated Systems Software Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344000, RF),  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4629-1002>  
[atayan24@yandex.ru](mailto:atayan24@yandex.ru)

**Chistyakov, Aleksandr E.,**  
professor of the Computer and Automated Systems Software Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344000, RF), Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor,  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8323-6005>  
[cheese\\_05@mail.ru](mailto:cheese_05@mail.ru)

**Strazhko, Aleksandr V.,**  
student of the Computer and Automated Systems Software Department, Don State Technical University (1, Gagarin sq., Rostov-on-Don, 344000, RF),  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2449-8531>  
[strajcko2@gmail.com](mailto:strajcko2@gmail.com)