

УДК 629.1.036

**Модель упругого скольжения в системе «колесо — поверхность дороги»<sup>1</sup>****М. В. Чувейко, С. В. Носачёв**

(Донской государственный технический университет)

*Представлена математическая модель взаимодействия колеса и поверхности дороги. Данная модель позволяет производить качественное исследование особенностей качения колеса для случая отсутствия потери сцепления. Экспериментальные исследования, выполненные в работе, произведены с использованием методов численного моделирования. В полученной математической модели предположено, что жёсткость дороги велика и её деформациями можно пренебречь, а поверхность колеса задана совокупностью точек. Результаты исследования показали отсутствие тривиальной зависимости между угловой частотой колеса и линейной скоростью его центра. Было установлено, что линейная скорость движения колеса при фиксированной угловой частоте существенно зависит от величины внешней нагрузки. Результаты работы представляют интерес в задачах машиностроения, в частности — при построении систем точного позиционирования.*

**Ключевые слова:** система «колесо — поверхность дороги», деформация, сила трения, упругое скольжение.

**Введение.** С момента появления автомобильного транспорта в машиностроительной области возникла задача обоснования природы сил сцепления системы «колесо — поверхность дороги». Данная проблема была рассмотрена специалистами в области механики, триботехники и математики, которые искали ответ в виде решения контактных задач, позволяющих определить размеры пятна контакта и эпюры касательных нормальных напряжений на площадке контакта [1, 2]. В настоящее время в этой области работает ряд отечественных учёных [3–7]. Одним из основоположников нового направления изучения контактных явлений — механики фрикционного взаимодействия (трибомеханики) — является И. Г. Горячева.

Несмотря на это, до сих пор не существует единого подхода к решению возникшей проблемы. В данной работе сформирована математическая модель, качественно описывающая динамику системы «колесо — поверхность дороги».

**Основная часть.** Рассмотрим задачу о качении колеса по поверхности дороги. Будем полагать, что жёсткость дороги достаточно велика, в связи с чем её деформациями можно пренебречь. Поверхность колеса зададим совокупностью точек упруго-диссипативно связанными между собой и центром колеса. Положение этих точек в отсутствие деформации колеса будем называть их естественным положением. Координаты естественного положения точек могут быть заданы посредством вектора  $\alpha^*$ , определяемого углами их отклонения от некоторой фиксированной метки М на колесе. Ограничимся моделью рассматривающей динамику  $n$  равноотстоящих друг от друга точек (в своём естественном состоянии) поверхности колеса. Тогда координаты вектора  $\alpha^*$  будут иметь следующие значения:

$$\alpha^* = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*]^T = \frac{1}{n} [0, 2\pi, \dots, 2\pi(n-1)]^T. \quad (1)$$

Реальное колесо в тангенциальном направлении не является абсолютно жёстким. Колесо деформируется в тангенциальном направлении под действием сил взаимодействия колеса с поверхностью дороги. Отклонение точек колеса от своего естественного положения будем задавать вектором  $\tilde{\alpha} = [\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n]^T$ .

<sup>1</sup> Работа выполнена в рамках инициативной НИР.

Кроме того, следует учесть тот факт, что в радиальном направлении колесо не является абсолютно жёстким. В результате этого действие вертикальной нагрузки приводит к появлению деформации колеса. Это, в свою очередь, приводит к формированию площадки контакта «колесо — поверхность дороги».

В данной работе не будет рассматриваться динамика этого процесса, а величина радиальных деформаций будет полагаться некоторой фиксированной величиной.

С учётом вышесказанного, моделируемое колесо будет иметь вид, приведённый на рис. 1.

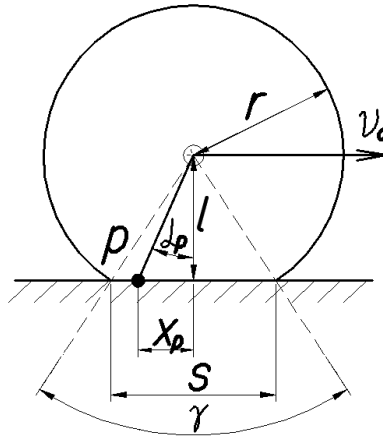


Рис. 1. Контакт «колесо — поверхность дороги»

Здесь  $r$  — радиус колеса;  $s$  — длина контакта «колесо — поверхность дороги»;  $l$  — высота центра колеса;  $\gamma$  — угол контакта;  $\alpha_p$  — угол некоторой точки  $p$  поверхности колеса;  $x_p$  — расстояние точки  $p$  от центра контакта «колесо — поверхность дороги»;  $v_c$  — скорость движения центра колеса вдоль горизонтальной оси.

Как видно из рисунка, параметры модели записываются следующим образом:

$$l = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}, \quad (2)$$

$$\gamma = \arcsin \frac{s}{2r}, \quad (3)$$

$$x_p = l \tan \alpha_p. \quad (4)$$

Из (4) следует, что линейная скорость точки  $p$  относительно центра колеса может быть найдена по формуле:

$$v_{pc} = \frac{dx_p}{dt} = \frac{l}{\cos^2 \alpha_p} \frac{d\alpha_p}{dt}. \quad (5)$$

Тогда абсолютная скорость точки  $p$  равна:

$$v_p = v_c - \frac{l}{\cos^2 \alpha_p} \frac{d\alpha_p}{dt}. \quad (6)$$

Сила трения, действующая на точку  $p$  со стороны поверхности дороги, может быть найдена по формуле:

$$F_p = -\text{sign}(v_p) f, \quad (7)$$

где  $f$  — некоторая константа;  $\text{sign}(\cdot)$  — функция знака.

Для реализации мягкой функции знака (рис. 2), в модели использована следующая формула:

$$\text{sign}(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(kx), \quad (8)$$

где  $k$  — некоторый коэффициент.

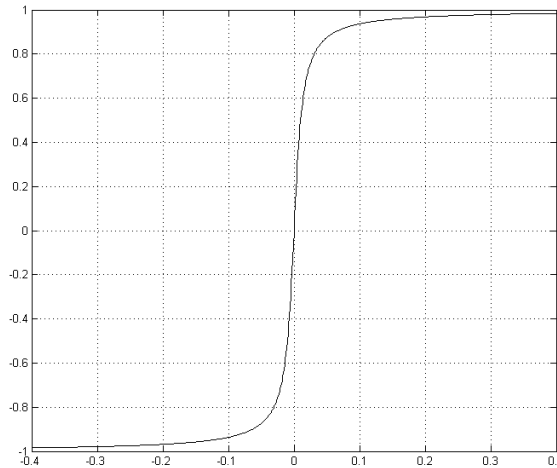


Рис. 2. График функции  $\text{sign}(\cdot)$

Введём вспомогательные матрицы  $G$  и  $E$  размера  $[n \times n]$ :

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Тогда матрицы жёсткости  $C$  и диссипации  $H$  будут иметь вид:

$$\begin{aligned} C &= c_1 G - c_2 E, \\ H &= h_1 G - h_2 E, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $c_1$  — коэффициент жёсткости взаимодействия между соседними точками колеса,  $c_2$  — коэффициент жёсткости взаимодействия точки и центра колеса,  $h_1$  — коэффициент диссипации взаимодействия между соседними точками колеса,  $h_2$  — коэффициент диссипации взаимодействия точки и центра колеса.

Пусть метка  $M$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Тогда динамика точек обода колеса в вариациях относительно их естественного положения может быть задана матричным уравнением:

$$J \frac{d^2 \tilde{a}}{dt^2} = C \tilde{a} + H \frac{d \tilde{a}}{dt} - IF \left( \tilde{a}, \frac{d \tilde{a}}{dt} \right), \quad (10)$$

где  $F$  — векторная функция силы, моделирующая сцепление колеса с дорогой, чьи компоненты, с учётом (6)—(8), определяются следующим выражением:

$$F_i \left( \ddot{\alpha}_i, \frac{d\ddot{\alpha}_i}{dt} \right) = \begin{cases} -f \cdot \text{sign} \left( v_c - l \frac{\frac{d\ddot{\alpha}_i}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}}{\cos^2(\ddot{\alpha}_i + \alpha_i^* + \varphi)} \right), & |\ddot{\alpha}_i + \alpha_i^* + \varphi| \leq \gamma \\ 0, & |\ddot{\alpha}_i + \alpha_i^* + \varphi| > \gamma \end{cases} \quad (11)$$

где  $J$  — момент инерции точек,  $\varphi$  — угол поворота центра колеса;  $\varphi = \omega t$ .

Динамика центра колеса будет описываться уравнением:

$$m \frac{dv_c}{dt} = F_{BH} + \sum_{i=1}^n F_i \left( \ddot{\alpha}_i, \frac{d\ddot{\alpha}_i}{dt} \right) \quad (12)$$

где  $m$  — масса колеса,  $F_{BH}$  — некоторая внешняя сила, приложенная к центру колеса (вдоль горизонтальной оси).

**Результаты моделирования.** Результат компьютерного моделирования показал довольно сложный характер поведения подобной системы. Так, например, диаграмма зависимости угловой частоты некоторой точки колеса от его угла поворота имеет вид, представленный на рис. 3, а. При этом стоит отметить, что имеет место существенная зависимость формы графика от внешней нагрузки и характеристик колеса. Отклонение точки обода колеса от её естественного положения в процессе вращения колеса можно оценить по рис. 3, б.

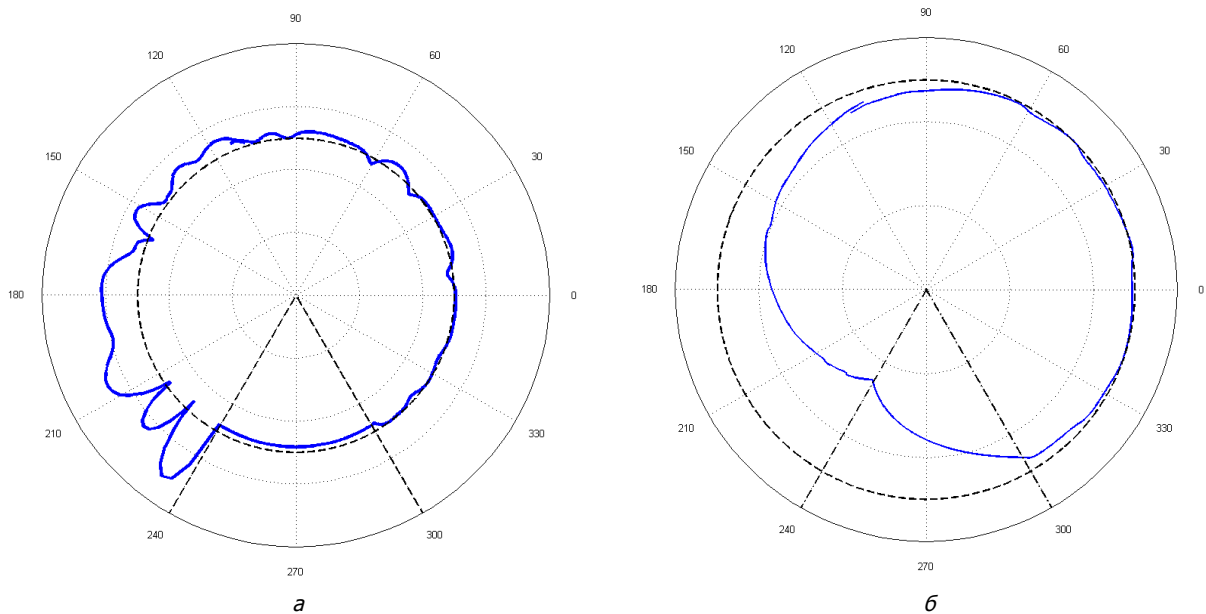


Рис. 3. Угловая частота точки обода колеса (а) и её отклонение от естественного положения (б)

Результат моделирования наглядно подтвердил тот факт, что в случае, когда внешняя нагрузка  $F_{BH}$  препятствует движению, точки колеса, находящиеся в набегающей полуокружности, подвергаются сжатию, а точки с противоположной стороны — растяжению. Это наглядно продемонстрировано на рис. 4, а. В случае сонаправленных векторов скорости движения центра колеса и внешней нагрузки, имеет место обратный эффект (рис. 4, б).

Это явление приводит к появлению эффекта упругого скольжения [5].

По результатам работы математической модели стало видно, что при фиксированной угловой частоте центра колеса в отсутствии классического скольжения (движение точек колеса в зоне контакта), скорость центра колеса в установившемся режиме не является величиной фиксированной и зависит от величины внешней нагрузки  $F_{BH}$ . Для случая на рис. 4, а, скорость точек

колеса в зоне зацепления ниже, чем скорость вращения центра колеса. Это приводит к сгущению точек в контакте. Однако, после выхода точки из зоны зацепления, её угловая частота резко возрастает и накопленное натяжение сводится к нулю (рис. 5).

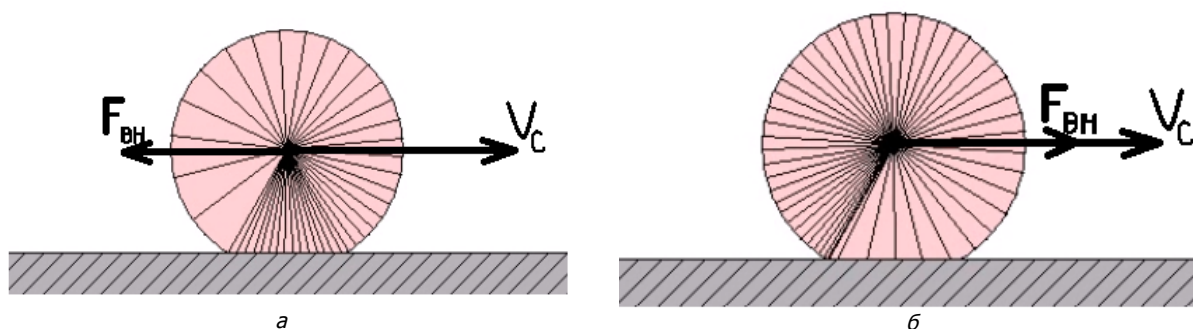


Рис. 4. Моделирование движения колеса при сонаправленной внешней силе и скорости (а) и с противоположным направлением (б)

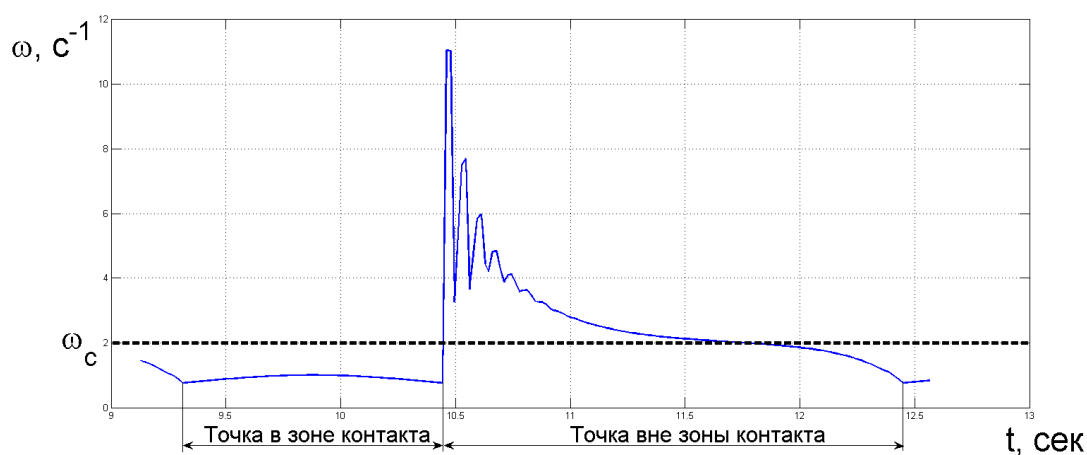


Рис. 5. Зависимости скорости отдельной точки колеса от времени

Таким образом, среднее значение от угловой частоты точки обода колеса за период вращения равно угловой частоте вращения центра колеса. Но на поступательную скорость движения колеса оказывает влияние именно скорость точек в области контакта.

**Заключение.** При качении колеса по поверхности дороги имеет место упругое скольжение. Таким образом, классическая формула связи угловой и линейной скорости ( $v_c = R\omega$ ) в случае неабсолютно жёсткого колеса, является приближённой. Более точное выражение для линейной скорости должно учитывать  $F_{вн}$  и параметры колеса.

Оценка влияния величины внешней нагрузки на упругое скольжение имеет большое значение для практики, т. к. при наличии упругого скольжения формируется разница расчётного и реального пути, пройденного колесом за некоторый промежуток времени.

#### Библиографический список

1. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. — Москва : Мир, 1989. — 509 с.
2. Carter, F. W. On the action of a locomotive driving wheel / F. W. Carter // Proc. R. Soc. — London, 1926. — 112A. — Pp. 151–157.
3. Ляпушин, Н. Н. Модель физических процессов в пятне контакта при движении колеса по рельсу со скольжением / Н. Н. Ляпушин, А. Н. Савоськин // Наука и техника транспорта. — 2008. — № 1. — С. 33–42.

4. Максак, В. И. Предварительное смещение и жёсткость механического контакта / В. И. Максак. — Москва : Наука, 1975. — 60 с.

5. Коган, А. Я. Взаимодействие колеса и рельса при качении // Вестник ВНИИЖТ. — 2004. — № 5. — С. 33–40.

6. Лапшин, В. П. Модель связи упруго-вязкого смещения поверхности колеса, относительно рельса с тяговыми характеристиками / В. П. Лапшин, И. А. Туркин, С. В. Носачёв // Вестник Дон. гос. техн. ун-та. — 2012. — № 5. — С. 40–49.

7. Горячева, И. Г. Механика фрикционного взаимодействия / И. Г. Горячева. — Москва : Наука, 2001. — 478 с.

Материал поступил в редакцию 05.02.13.

### References

1. Johnson, K. Механика контактного взаимодействия. [Contact interaction mechanics.] Moscow, Mir, 1989, 509 p. (in Russian).

2. Carte, F. W. On the action of a locomotive driving wheel. Proc. R. Soc., London, 1926, 112A, pp. 151–157.

3. Lyapushin, N. N., Savoskin, A. N. Model` fizicheskix processov v pyatne kontakta pri dvizhenii kolesa po rel`su so skol` zheniem. [Model of physical processes in contact patch under wheel sliding motion on the track.] Nauka i tekhnika transporta, 2008, no. 1, pp. 33–42 (in Russian).

4. Maksak, V. I. Predvaritel`noe smeshhenie i zhestkost` mexanicheskogo kontakta. [Pre-displacement and mechanical contact rigidity.] Moscow : Nauka, 1975, 60 p. (in Russian).

5. Kogan, A. Y. Vzaimodejstvie kolesa i rel`sa pri kachenii. [Wheel — rail interaction under rolling.] Vestnik VNIIZhT, 2004, no. 5, pp. 33–40 (in Russian).

6. Lapshin, V. P., Turkin, I. A., Nosachev, S. V. Model` svyazi uprugovyazkogo smeshheniya pov-erxnosti kolesa otnositel`no rel`sa s tyagovymi kharakteristikami. [Bond model of viscoelastic wheel surface shift relative to rail with pull characteristics.] Vestnik of DSTU, 2012, no. 5, pp. 40–49 (in Russian).

7. Goryacheva, I. G. Механика фрикционного взаимодействия. [Friction interaction mechanics.] Moscow : Nauka, 2001, 478 p. (in Russian).

## ELASTIC SLIP MODEL IN 'WHEEL — ROAD SURFACE' SYSTEM<sup>1</sup>

**M. V. Chuveyko, S. V. Nosachev**

(Don State Technical University)

*A mathematical model of the wheel — road surface interaction is presented. This model permits to carry out a qualitative investigation on the wheel swing specificity in a coupling case. The experimental investigation is implemented through the numerical modeling methods. In the obtained mathematical model, it is assumed that the inflexibility of the road is rather great, and its deformations can be neglected. The surface of the wheel is specified by a set of points. The research results have shown a lack of the trivial dependence between the angular frequency of the wheel and the linear speed of its centre. It was established that the linear speed of the wheel movement depends considerably on the value of the external loading. The work results are of interest in the mechanical engineering problems, in particular — in the construction of the exact positioning systems.*

**Keywords:** 'wheel — road surface' system, deformation, friction force, elastic slip.

---

<sup>1</sup> The research is done within the frame of the independent R&D.