

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 62.932

Исследование свободных движений пилы

А. А. Авакян

(филиал Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского в г. Ростове-на-Дону),

В. А. Финоченко

(Ростовский государственный университет путей сообщения),

А. Н. Чукарин

(Донской государственный технический университет)

Исследованы собственные движения пилы путём построения и анализа математической модели инструмента на основе уравнений теории упругости. Предложенная авторами математическая модель может быть использована при построении систем диагностики протекания технологического процесса.

Ключевые слова: пила, математическая модель, собственные частоты.

Введение. Повышенная вибрация и шумоактивность при работе пилорамы вызывает необходимость в особых условиях закрепления полотна, что позволило бы изменить амплитудно-частотные характеристики пилы с целью отстройки собственных частот от частот возбуждений, определяемых рабочим процессом. С этой целью проведём исследование собственных движений пилы при следующих условиях.

Результаты исследований. Считаем, что две боковые стороны пластины упруго защемлены, а две другие свободны, уравнение колебаний запишем в виде:

$$D \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} \right) - N_{\eta} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(\eta, t), \quad (1)$$

где h — толщина пластины; ρ — плотность стали; $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость

пластины; N_{η} — сила предварительного натяжения пилы [1].

Продольные силы предварительного натяжения изменяют частоты её собственных колебаний. Кроме того особенности граничных условий определяются также наличием «упругого защемления».

Граничные условия:

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = c \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad \eta = \pm \frac{b}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \text{ при } \xi = \pm \frac{a}{2}.$$

Таблица 1

Характеристики пилы как объекта исследования

Параметры рамной пилы	Характеристики
B — ширина пилы	160÷180
h — толщина пилы	1.6; 1.8; 2.0; 2.2; 2.5
L — длина пилы	1100; 125; 1600; 1750; 1950
D — цилиндрическая жёсткость	75÷275
σ — напряжение в срединной плоскости пилы	80÷120 МПа
N_{η} — сила натяжения пилы	20.5÷450 кН

Эти данные будут использованы при формулировании необходимых допущений.

В первом приближении, с учётом того, что соотношение ширины и длины пластины примерно $\frac{1}{10}$, воспользуемся соотношением изменённой вследствие натяжения собственной частоты, приведённым для балки:

$$\Omega_k = \omega_k \cdot \sqrt{1 + \frac{N}{N_{kr}}},$$

где ω_k — собственная частота для пластины при $N = 0$; N — усилие предварительного натяжения; N_{kr} — критическая сжимающая сила для балки, соответствующая продольному изгибу в плоскости колебания $N_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$ [2].

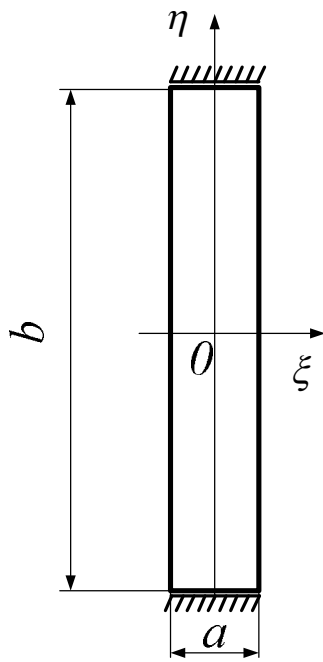


Рис. 1. Расчётная схема пилы

Для указанных граничных условий можно принять решение уравнения в виде (2):

$$w(\xi, \eta, t) = C_0 \cos k_1 \xi \cdot \cos k_2 \eta \cdot \exp(j\omega t) = Am(\xi, \eta) \cdot \exp(j\omega t),$$

где j — мнимая единица; k_1, k_2 — волновые числа.

Вблизи границ $\xi = \pm \frac{a}{2}$ решение представляется в виде (3):

$$w(\xi, \eta, t) = \cos k_2 \eta \cdot [C_0 \cdot \cos k_1 \xi + f(\xi)] \cdot \exp(j\omega t), \quad (3)$$

где $f(\xi)$ — функция, позволяющая выполнить условия закрепления.

Вблизи границ $\eta = \pm \frac{b}{2}$ решение представляется в виде:

$$w(\xi, \eta, t) = \cos k_1 \xi \cdot [C_0 \cdot \cos k_2 \eta + \psi(\eta)] \cdot \exp(j\omega t), \quad (4)$$

где $\psi(\eta)$ — функция, позволяющая выполнить условия закрепления.

Следовательно, общее выражение $Am(\xi, \eta)$ имеет вид:

$$Am(\xi, \eta) = C_0 \cos k_1 \xi \cdot \cos k_2 \eta + f(\xi) \cdot \cos k_2 \eta + \psi(\eta) \cdot \cos k_1 \xi. \quad (5)$$

В средней части пластины $f(\xi)$ и $\psi(\eta)$ пренебрежимо малы, поэтому выражение $Am(\xi, \eta) = C_0 \cos k_1 \xi \cdot \cos k_2 \eta$ должно удовлетворять уравнению:

$$\nabla^2 \nabla^2 Am(\xi, \eta) - a^4 Am(\xi, \eta) = 0, \quad (6)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа; $a^4 = \frac{\rho \cdot h}{D}$.

Подставляя выражение $Am(\xi, \eta)$ в уравнение (1) получим:

$$\begin{aligned} k_1^4 \cos k_1 \xi \cdot C_0 \cos k_2 \eta + 2C_0 (-k_1^2 \cos k_1 \xi) \cdot (-k_2^2 \cos k_2 \eta) + k_2^4 \cos k_2 \eta \cdot C_0 \cos k_1 \xi - \\ - a^4 \cos k_1 \xi \cdot \cos k_2 \eta \cdot C_0 = 0 \\ k_1^4 + 2k_1^2 k_2^2 + k_2^4 - a^4 = 0, \text{ то есть } a^2 = k_1^2 + k_2^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Вблизи границ $\xi = \pm \frac{a}{2}$ несущественно влияние функции $\psi(\eta)$, поэтому уравнение (6) можно записать в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 [f(\xi) \cdot \cos k_2 \eta] - a^4 \cdot f(\xi) \cdot \cos k_2 \eta = 0. \quad (8)$$

После дифференцирования имеем:

$$\frac{d^4 f(\xi)}{d\xi^4} \cos k_2 \eta + 2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \cdot (-k_2^2 \cos k_2 \eta) + f(\xi) \cdot k_2^4 \cos k_2 \eta - a^4 \cos k_2 \eta = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^4 f(\xi)}{d\xi^4} - 2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} \cdot k_2^2 + f(\xi) \cdot (k_2^4 - a^4) = 0.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения получаем в виде: $a_1^2 = k_1^2 + 2k_2^2$.
Выражение для функций $f(\xi)$ получим в виде:

$$f(\xi) = C_1 \exp\left(-a_1 \left(\xi + \frac{a}{2}\right)\right) \text{ — вблизи границы } \xi = -\frac{a}{2}, \text{ где } a_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2};$$

$$f(\xi) = C_1 \exp\left(-a_1 \left(\frac{a}{2} - \xi\right)\right) \text{ — вблизи границы } \xi = \frac{a}{2}, \text{ где } a_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}.$$

Аналогично рассуждая, можно определить функцию $\psi(\eta)$.

Вблизи границ $\eta = \pm \frac{b}{2}$ несущественно влияние функции $f(\xi)$, поэтому уравнение (9) можно записать в виде:

$$\nabla^2 \nabla^2 [\psi(\eta) \cdot \cos k_1 \xi] - a^4 \cdot \psi(\eta) \cdot \cos k_1 \xi = 0. \quad (10)$$

После дифференцирования имеем:

$$\frac{d^4 \psi(\eta)}{d\eta^4} \cos k_1 \xi + 2 \frac{d^2 \psi(\eta)}{d\eta^2} \cdot (-k_1^2 \cos k_1 \xi) + \psi(\eta) \cdot k_1^4 \cos k_1 \xi - a^4 \cos k_1 \xi = 0$$

$$\frac{d^4 \psi(\eta)}{d\eta^4} - 2 \frac{d^2 \psi(\eta)}{d\eta^2} \cdot k_1^2 + \psi(\eta) \cdot (k_1^4 - a^4) = 0.$$

Корни соответствующего характеристического уравнения получаем в виде: $a_2^2 = 2k_1^2 + k_2^2$.
Выражение для функций $\psi(\eta)$ получим в виде:

$$\psi(\eta) = C_2 \exp\left(-a_2 \left(\eta + \frac{b}{2}\right)\right) \text{ — вблизи границы } \eta = -\frac{b}{2}, \text{ где } a_2 = \sqrt{2k_1^2 + k_2^2}; \quad (11)$$

$$\psi(\eta) = C_2 \exp\left(-a_2 \left(\frac{b}{2} - \eta\right)\right) \text{ — вблизи границы } \eta = \frac{b}{2}, \text{ где } a_2 = \sqrt{2k_1^2 + k_2^2}.$$

Рассмотрим граничные условия на концах $\eta = \pm \frac{b}{2}$:

$$Am(\xi, \eta) = 0 \quad \frac{\partial^2 Am(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 Am(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} = c \cdot \frac{\partial Am(\xi, \eta)}{\partial \eta},$$

где c — жёсткость упругого защемления (4); ν — коэффициент Пуассона для стали.

Учтём, что вдоль всей стороны пластины $\eta = -\frac{b}{2}$ функция $f(\xi)$ равна нулю во всех точках за исключением угловых точек, поэтому можно записать:

$$Am(\xi, \eta) = \left[C_0 \cos k_2 \frac{b}{2} + \psi(\eta) \right] \cdot \cos k_1 \xi, \quad (12)$$

$$Am(\xi, \eta) \Big|_{\eta = -\frac{b}{2}} = \left[C_0 \cos k_2 \frac{b}{2} + C_2 \right] \cdot \cos k_1 \xi = 0.$$

Для записи второго условия определим необходимые производные:

$$\frac{dAm(\xi, \eta)}{d\eta} = \cos k_1 \xi \cdot \left[-C_0 k_2 \sin k_2 \eta - a_2 C_2 \exp\left(-a_2 \left(\eta + \frac{b}{2}\right)\right) \right] \quad (13)$$

$$\frac{d^2 Am(\xi, \eta)}{d\eta^2} = \cos k_1 \xi \cdot \left[-C_0 k_2^2 \cos k_2 \eta - a_2^2 C_2 \exp\left(-a_2 \left(\eta + \frac{b}{2}\right)\right) \right].$$

Подставляя выражения производных в уравнение (13), получим при $\eta = -\frac{b}{2}$:

$$\begin{aligned} & \cos k_1 \xi \cdot \left(-C_0 k_2^2 \cos k_2 \frac{b}{2} + a_2^2 C_2 \right) + v \left(C_0 \cos k_2 \frac{b}{2} + C_2 \right) \cdot (-k_1^2 \cos k_1 \xi) = \\ & = \frac{c}{D} \cos k_1 \xi \left(C_0 k_2 \sin k_2 \frac{-b}{2} - a_2 C_2 \right) \end{aligned}$$

Окончательно получаем систему уравнений вида:

$$C_0 \cos k_2 \frac{b}{2} + C_2 = 0,$$

$$C_0 \left(-k_2^2 \cos k_2 \frac{b}{2} - k_1^2 v \cos k_2 \frac{b}{2} + \frac{c}{D} k_2 \sin k_2 \frac{b}{2} \right) + C_2 \left(a_2^2 - v k_1^2 + a_2 \cdot \frac{c}{D} \right) = 0.$$

Рассмотрим условия свободных краёв:

$$\frac{\partial^2 Am(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial^2 Am(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 Am(\xi, \eta)}{\partial \xi^3} + (2-v) \frac{\partial^3 Am(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta^2} \quad \text{при } \xi = \pm \frac{a}{2}.$$

Учтём, что вдоль всей стороны пластины $\xi = -\frac{a}{2}$ функция $\psi(\eta)$ равна нулю во всех точках за исключением угловых точек, поэтому можно записать:

$$Am(\xi, \eta) \Big|_{\xi = -\frac{a}{2}} = [C_0 \cos k_1 \xi + f(\xi)] \cdot \cos k_2 \eta = 0,$$

$$Am(\xi, \eta) \Big|_{\xi = \frac{a}{2}} = [C_0 \cos k_1 \frac{a}{2} + C_1] \cdot \cos k_2 \eta = 0.$$

Для записи второго условия определим необходимые производные:

$$\frac{d^2 Am(\xi, \eta)}{d\xi^2} = \cos k_2 \eta \cdot \left[-C_0 k_1^2 \cos k_1 \xi - a_1^2 C_1 \exp \left(-a_1 \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \right) \right],$$

$$\frac{d^2 Am(\xi, \eta)}{d\eta^2} = \cos k_1 \xi \cdot \left[-C_0 k_2^2 \cos k_2 \eta - a_2^2 C_2 \exp \left(-a_2 \left(\eta + \frac{b}{2} \right) \right) \right],$$

$$\frac{d^3 Am(\xi, \eta)}{d\xi^3} = \cos k_2 \eta \cdot \left[C_0 k_1^3 \sin k_1 \xi - a_1^3 C_1 \exp \left(-a_1 \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \right) \right],$$

$$\frac{d^3 Am(\xi, \eta)}{d\eta^2 d\xi} = -k_2^2 \cos k_2 \eta \cdot \left[-C_0 k_1 \sin k_1 \xi - a_1 C_1 \exp \left(-a_1 \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \right) \right].$$

Граничные условия на свободных сторонах, учитывая, что косинус является чётной функцией, записываем в виде:

$$\cos k_2 \eta \cdot \left(-C_0 k_1^2 \cos k_1 \frac{a}{2} + a_1^2 C_1 \right) - v k_2^2 \cos k_1 \xi \left(C_0 \cos k_1 \frac{a}{2} + C_1 \right) = 0,$$

$$\cos k_2 \eta \cdot \left(-C_0 k_1^3 \sin k_1 \frac{-a}{2} - a_1^3 C_1 \right) + (2-v) k_2^2 \cos k_2 \eta \left(-C_0 \sin k_1 \frac{-a}{2} + a_1 C_1 \right) = 0.$$

Окончательно получаем систему уравнений вида:

$$C_0 \left(-k_1^2 \cos k_1 \frac{a}{2} - v k_2^2 \cos k_1 \frac{a}{2} \right) + C_1 (a_1^2 - v k_2^2) = 0,$$

$$C_0 \cdot \left(k_1^3 \sin k_1 \frac{a}{2} + (2-v) k_2^2 \sin k_1 \frac{a}{2} \right) + C_1 (a_1 (2-v) k_2^2 - a_1^3) = 0,$$

где $a_1 = \sqrt{k_1^2 + 2k_2^2}$; $a_2 = \sqrt{2k_1^2 + k_2^2}$.

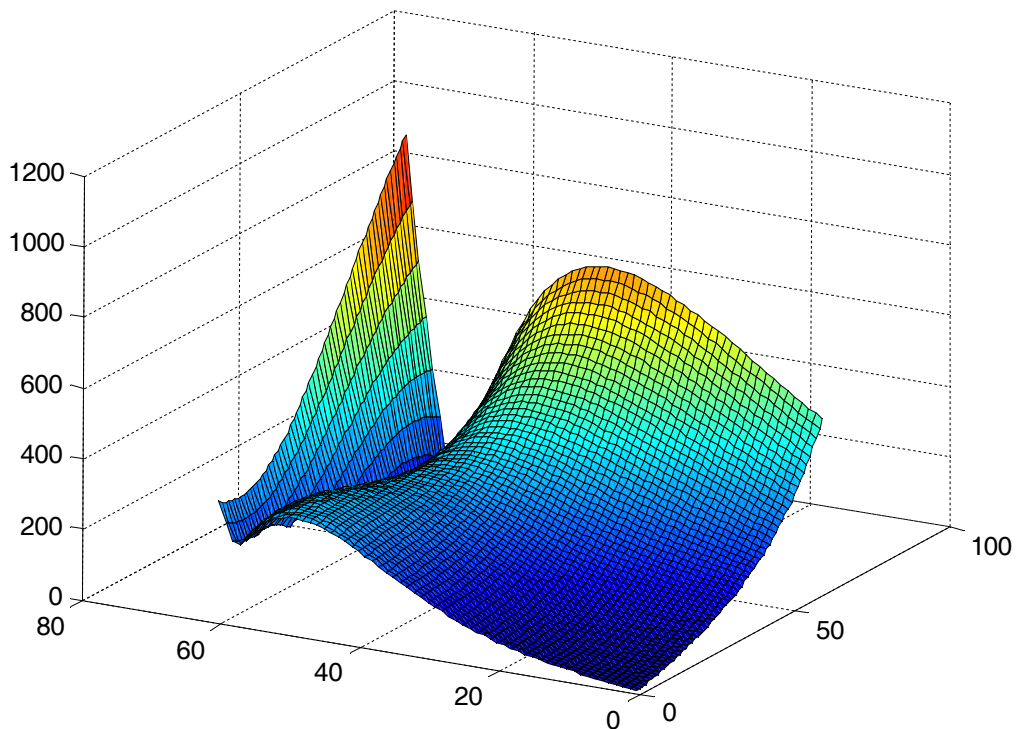


Рис. 2. Зависимость функции $F(k_1, k_2)$ от волновых чисел

Для одновременного выполнения приведённых уравнений необходимо, чтобы определители этих уравнений равнялись нулю, то есть решения следующих уравнений:

$$F1 = \begin{vmatrix} \cos k_2 \frac{b}{2} & 1 \\ -k_2^2 \cos k_2 \frac{b}{2} - k_1^2 v \cos k_2 \frac{b}{2} + \frac{c}{D} k_2 \sin k_2 \frac{b}{2} & a_2^2 - vk_1^2 + a_2 \cdot \frac{c}{D} \end{vmatrix} = 0,$$

$$F2 = \begin{vmatrix} -k_1^2 \cos k_1 \frac{a}{2} - vk_2^2 \cos k_1 \frac{a}{2} & a_1^2 - vk_2^2 \\ k_1^3 \sin k_1 \frac{a}{2} + (2-v)k_2^2 \sin k_1 \frac{a}{2} & a_1(2-v)k_2^2 - a_1^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Для обоснования дальнейших рассуждений был использован пакет прикладных программ MatLab. В результате была построена поверхность, определяемая выражением: $F(k_1, k_2) = \text{abs}(F1(k_1, k_2)) + \text{abs}(F2(k_1, k_2))$ (рис. 2).

Как следует из анализа полученной поверхности, «овраг» существует. Для того чтобы уточнить начальные значения волновых чисел, строим контурный график (рис. 3). Как видно из него, значения волновых чисел лежат около значений $k_1 = 5, k_2 = 5$ (графики построены относительно индексов, значит, при расчётном шаге 0,1 индексу 50 соответствует волновое число 5).

Расчёт, проведённый в среде MatLab с использованием встроенной функции «fsolve», позволил получить следующие результаты:

k =	fval =	ex =
5.194	8.3576e-015	1
5.0265	-2.2737e-012	

Заключение. Как видно из полученных результатов, значение ошибки решения задачи «fval» имеет порядок $10^{-12} \div 10^{-15}$, то есть точность вполне достаточна. Значение «ex» является положи-

тельным числом, что, по условиям MatLab'a, означает успешное прохождение расчёта. Полученные результаты позволяют использовать разработанные программы для проведения математического моделирования как свободных, так и вынужденных движений пилы.

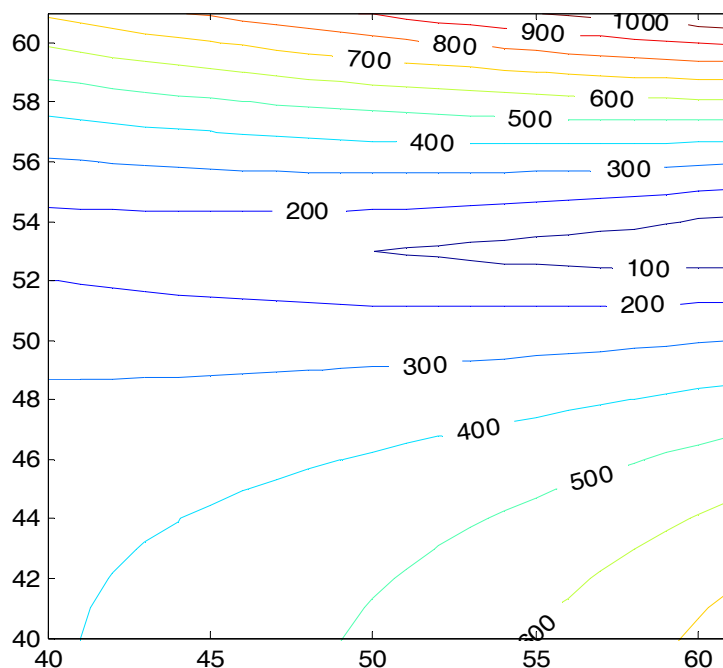


Рис. 3. Контурный график

Библиографический список

1. Болотин, В. В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок / В. В. Болотин // Инженерный сборник. — М.: Институт механики АН СССР, 1961. — Т. 31. — С. 3–14.
2. Бидерман, В. Л. Прикладная теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. — М.: Высшая школа, 1980. — С. 480.

Материал поступил в редакцию 17.02.2012.

References

1. Bolotin, V. V. Dinamicheskij kraevoj e`ffekt pri uprugix kolebaniyax plastinok / V. V. Bolotin // Inzhenerny`j sbornik. — M.: Institut mexaniki AN SSSR, 1961. — T. 31. — S. 3–14. — In Russian.
2. Biderman, V. L. Prikladnaya teoriya mexanicheskix kolebanij / V. L. Biderman. — M.: Vy`sshaya shkola, 1980. — S. 480. — In Russian.

SAW FREE MOTION STUDY

A. A. Avakyan

(Moscow State University of Technologies and Management, Rostov-on-Don Branch),

V. A. Finochenko

(Rostov State Transport University),

A. N. Chukarin

(Don State Technical University)

Saw proper motion is studied through the building and analysis of the tool mathematical model based on the elasticity theory equations. The suggested mathematical model can be used for building behavior diagnostic systems.

Keywords: saw, mathematical model, natural frequencies.