

УДК 621.371.537.86

А.П. ЗВЕРЕВ

## ОСОБЕННОСТИ ВЫБОРА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛЕЙ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ИСТОЧНИКОВ ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

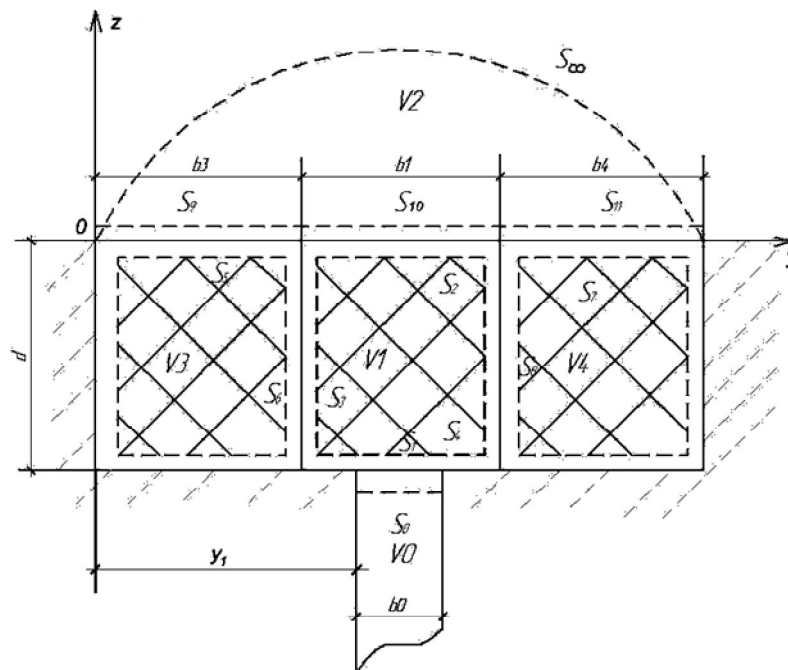
В статье показана возможность уменьшения вычислительных затрат при решении граничных задач за счет рационального представления функций Грина. На примере решения задачи электродинамического анализа проиллюстрирована возможность оптимальной алгебраизации математических соотношений.

**Ключевые слова:** рупорный излучатель, продольно-слоистое заполнение, метод Галеркина, интегрирование.

**Введение.** При решении граничных задач могут возникнуть вычислительные сложности, связанные с особенностями математического представления соответствующих функций, описывающих волновые процессы, протекающие в системе.

**Постановка задачи.** На примере решения задачи электродинамического анализа ступенчатого рупора с продольно-слоистым диэлектрическим заполнением проиллюстрирована возможность уменьшения вычислительных затрат за счет рационального представления функции Грина (поля вспомогательного источника).

**Уменьшение вычислительных затрат при решении граничной задачи.** В рассматриваемой модели излучателя (рисунок) слои диэлектрика (области V1, V3, V4) являются замкнутыми областями, а свободное полупространство (область V2) и полубесконечный волновод (область V0) – полукрытыми областями.



Модель рупорного излучателя

В соответствии с методом частичных областей [1] полагаем, что каждая частичная область электромагнитно изолирована, сторонние источники в областях отсутствуют, а возбуждение областей осуществляется эквивалентными токами, распределенными на поверхностях, ограничивающих области. Накладываем на тангенциальные компоненты электрического поля вспомогательного источника условие равенства нулю на поверхности, ограничивающей область. Тогда по-

ле в частичной области возбуждается эквивалентным магнитным током. Поскольку на идеально проводящих участках поверхности, ограничивающей область, касательная составляющая вектора  $\bar{E}$  равна нулю, эквивалентные магнитные токи, пропорциональные  $\bar{E}$ , отличны от нуля только на неметаллизированных участках поверхности:

$$\bar{b}\bar{H}(p) = \int_S \bar{j}^M(q)\bar{H}^M(p,q)dS_q. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{H}^M(p,q)$  – возбуждаемые в точке  $p$  векторы напряженности магнитного поля вспомогательного магнитного источника (пропорциональные функции Грина данной области), расположенного в точке  $q$ , находящейся на поверхности, ограничивающей область;  $\bar{j}^M(q)$  – эквивалентный магнитный поверхностный ток.

$$\bar{j}^M = [\bar{n}, \bar{E}(q)], \quad (2)$$

где  $\bar{n}$  – внешняя нормаль к поверхности  $S$ , ограничивающей область;  $\bar{E}(q)$  – вектор напряженности электрического поля в точке  $q$ ;  $\bar{b}$  – единичный вектор, вдоль которого ориентирован вспомогательный магнитный диполь.

Полагаем, что излучатель возбуждается волнами типа Т, набегающими по волноводу (область V0) из минусбесконечности. В связи с этим в системе существуют только следующие составляющие электромагнитного поля:  $H_x, E_y, E_z$ .

Для примера запишем представление для составляющей  $H_x$  магнитного поля в области V1. Принимая во внимание совпадение смежных поверхностей  $S_3$  и  $S_6$ ,  $S_4$  и  $S_8$ ,  $S_2$  и  $S_{10}$ , а также совпадение неметаллизированного участка поверхности  $S_1$  с  $S_{0,r}$ , имеем в точке наблюдения ( $p_{V1}$ ) частичной области V1:

$$\begin{aligned} H_{x_{V1}}(p_{V1}) = & \int_{S_0} E_{y_{V0}}(q_{S_0})H_{x_{V1}}^M(p_{V1},q_{S_0})dS_0 - \\ & - \int_{S_2} E_{y_{V1}}(q_{S_2})H_{x_{V1}}^M(p_{V1},q_{S_2})dS_2 - \\ & - \int_{S_6} E_{z_{V3}}(q_{S_6})H_{x_{V1}}^M(p_{V1},q_{S_6})dS_6 + \\ & + \int_{S_8} E_{z_{V4}}(q_{S_8})H_{x_{V1}}^M(p_{V1},q_{S_8})dS_8. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $E_{y_{V0}}, E_{y_{V1}}, E_{z_{V3}}, E_{z_{V4}}$  – тангенциальные составляющие электрического поля областей V0, V1, V3 и V4 в точках  $q_{S_0}, q_{S_2}, q_{S_6}$  и  $q_{S_8}$  поверхностей  $S_0, S_2, S_6$  и  $S_8$ , ограничивающих область V1.

Учитывая, что каждую поверхность можно рассматривать как плоскость, перпендикулярную продольной оси волновода (направленного по осям  $y$  либо  $z$ ), составляющие электрического поля целесообразно представлять в виде поперечных компонент электрического поля соответственно ориентированного волновода [1, 2].

Аналогичным образом можно представить поля в областях V2, V3 и V4.

Поле в области V0 представлялось в виде разложения по системе волноводных гармоник.

Для обеспечения единственности решения электродинамической задачи необходимо приравнять тангенциальные составляющие магнитного поля смежных областей на границах их раздела, т.е. совместить точки наблюдения на границах раздела смежных областей. В результате получим систему интегральных уравнений, которая в операторном виде представлена следующим образом:

$$\begin{cases} H_{x_{r2}}(y', z' = 0) = H_{x_{r1}}(y', z' = 0), \\ H_{x_{r2}}(y', z' = 0) = H_{x_{r3}}(y', z' = 0), \\ H_{x_{r2}}(y', z' = 0) = H_{x_{r4}}(y', z' = 0), \\ H_{x_{r1}}(y' = b_3, z') = H_{x_{r3}}(y' = b_3, z'), \\ H_{x_{r1}}(y' = b_3 + b_1, z') = H_{x_{r4}}(y' = b_3 + b_1, z'), \\ H_{x_{r1}}(y', z' = -d) = H_{x_{r0}}(y', z' = -d), \end{cases} \quad (4)$$

где штрихованные  $y'$  и  $z'$  обозначают координаты точек наблюдения.

Таким образом, приравниваются как тангенциальные магнитные, так и тангенциальные электрические компоненты полей смежных областей.

Решение системы интегральных уравнений выполнялось методом Галеркина.

Для конкретизации представления полей  $H_x^M(p, q)$  в частичных областях необходимо решить задачу о возбуждении соответствующей частичной области бесконечной нитью магнитного стороннего тока, ориентированной вдоль оси  $Ox$  и имеющей единичную амплитуду и нулевую фазу. Решение производится в два этапа.

На первом этапе решается задача о возбуждении плоского волновода. Решение неоднородных уравнений Максвелла сводится к решению неоднородного уравнения Гельмгольца для комплексных амплитуд магнитного векторного потенциала  $\bar{A}^M$  [2]. Вектор напряженности магнитного поля выражается через векторный потенциал. Решение уравнения Гельмгольца представлялось в виде разложения в ряд Фурье для волны, бегущей в направлении оси  $z$  (первый волновод) и оси  $y$  (второй волновод):

$$A_{x_B}^M(y, z) = \frac{1}{b_1} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \gamma_{1p}^{-1} \cos(p\pi b_1^{-1}y) \cos(p\pi b_1^{-1}y') \exp[\pm \gamma_{1p}(z - z')], \quad (5)$$

$$A_{x_{rB}}^M(y, z) = \frac{1}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \gamma_{1rp}^{-1} \cos(p\pi d^{-1}z) \cos(p\pi d^{-1}z') \exp[\pm \gamma_{1rp}(y - y')]. \quad (6)$$

Здесь:

$$\gamma_{1rp} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 - \varepsilon_1}; \quad \gamma_{1p} = \sqrt{\left(\frac{p\pi}{b_1}\right)^2 - \varepsilon_1};$$

$$\varepsilon_p = \begin{cases} 1 & \text{при } p = 0 \\ 2 & \text{при } p \neq 0. \end{cases}$$

Нештрихованные  $y$  и  $z$  соответствуют координатам источников.

На втором этапе к полученному выше решению неоднородного уравнения добавляется решение однородного уравнения Гельмгольца. Это решение для каждой парциальной волны содержит два неизвестных коэффициента:

$$A_{x_{одн}}^M = \frac{1}{2b_1} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \gamma_{1p}^{-1} (E_{1p} e^{-\gamma_{1p}z} + E_{2p} e^{\gamma_{1p}z}) \cos(p\pi b_1^{-1}y) \cos(p\pi b_1^{-1}y'); \quad (7)$$

$$A_{x_r}^M = \frac{1}{2d} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p \gamma_{1rp}^{-1} (E_{3p} e^{-\gamma_{1rp}y} + E_{4p} e^{\gamma_{1rp}y}) \cos(p\pi d^{-1}z) \cos(p\pi d^{-1}z'). \quad (8)$$

Неизвестные коэффициенты  $E$  определяются из граничных условий для тангенциальных составляющих напряженности электрического поля на торцевых стенках резонатора. В результате получим следующие выражения для магнитного поля вспомогательного источника резонатора

(область V1), образованного из волновода, в котором распространяется волна в направлении оси z или y (резонатор с продольным направлением по оси z или y):

$$H_{x_{v1}}^m = -i\varepsilon_1 \frac{1}{b_1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\gamma_{1p} \operatorname{sh}(\gamma_{1p} d)} \cos \left[ \frac{p\pi}{b_1} (y' - b_3) \right] \cos \left[ \frac{p\pi}{b_1} (y - b_3) \right] \times \begin{cases} \operatorname{ch}(\gamma_{1p} z) \operatorname{ch}[\gamma_{1p} (d + z')] & \text{при } z' < z \\ \operatorname{ch}(\gamma_{1p} z') \operatorname{ch}[\gamma_{1p} (d + z)] & \text{при } z' > z; \end{cases} \quad (9)$$

$$H_{x_{v1}}^m = -i\varepsilon_1 \frac{1}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_p (-1)^p}{\gamma_{1p} \operatorname{sh}(\gamma_{1p} b_1)} \cos \left[ \frac{p\pi}{d} z' \right] \cos \left[ \frac{p\pi}{d} z \right] \times \begin{cases} \operatorname{ch}(\gamma_{1p} (y - b_3)) \operatorname{ch}[\gamma_{1p} (y' - b_3 - b_1)] & \text{при } y' > y \\ \operatorname{ch}(\gamma_{1p} (y' - b_3)) \operatorname{ch}[\gamma_{1p} (y - b_3 - b_1)] & \text{при } y' < y. \end{cases} \quad (10)$$

Таким образом, соотношения для полей вспомогательных источников могут быть представлены различными выражениями.

Выбор выражения для поля вспомогательного источника целесообразно увязывать с видом представления эквивалентного тока, распределённого на конкретной поверхности, охватывающей область. Рассмотрев два варианта представления полей вспомогательных источников, установили, что более предпочтительным является такое представление поля вспомогательного источника, которое характерно для резонатора с продольным направлением, совпадающим с продольным направлением волновода, через поперечные составляющие электрического поля которого выражается эквивалентный поверхностный ток, входящий в подынтегральные выражения.

Проведем вывод коэффициентов, описывающих связь гармоник поверхностного тока на  $S_0$ , с гармониками поверхностного тока, распределёнными на поверхности  $S_3$ , при сшивании полей областей V0 и V1 по границе раздела  $S_0$ . Эта группа коэффициентов вычисляется после соответствующих преобразований третьего слагаемого правой части выражения (3). При применении метода Галеркина в качестве весовых функций использованы базисные функции разложения

поверхностных токов на поверхности  $S_0$ :  $\cos \left[ \frac{m'_0 \pi}{b_0} (y' - y_1) \right]$ , базисные функции на поверхности  $S_3$

имеют вид  $\cos \left[ \frac{m_{3\Gamma} \pi}{d} z \right]$ , где  $m_{3\Gamma}$  - номера гармоник волновода, ориентированного вдоль

оси y, а  $m'_0$  - номер весовой гармоники. В соответствии с методом Галеркина после умножения интегрального уравнения, определяющего связь поля возбуждающего волновода (область V0) с полем в области V1 (см. шестое уравнение системы (4)) на весовые функции, производится интегрирование по точкам наблюдения.

В первом случае при выводе коэффициентов используем выражение для поля вспомогательного источника резонатора с продольным направлением по оси z. Точки наблюдения при этом имеют координаты  $y', z' = -d$ , точки источников -  $y = (b_3, z)$ . Подставляем выражения для электрического поля и поля вспомогательного источника при условии, что  $z' < z$ . В результате получим следующее выражение:

$$C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0} = \int_{y_1}^{y_1 + b_0} \cos \left[ \frac{m'_0 \pi}{b_0} (y' - y_1) \right] \int_{-d}^0 \left( -\frac{1}{i\varepsilon_3} \right) \sum_{m_{3\Gamma}} \gamma_{3\Gamma m_{3\Gamma}} \cos \left( \frac{m_{3\Gamma} \pi}{d} z \right) \times \times (-i\varepsilon_1) \frac{1}{b_1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\gamma_{1p} \operatorname{sh}(\gamma_{1p} d)} \cos \left[ \frac{p\pi}{b_1} (y' - b_3) \right] \operatorname{ch}(\gamma_{1p} z) dz dy'. \quad (11)$$

После вычисления интегралов получим:

$$C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0} = \frac{\varepsilon_1 \gamma_{3\Gamma m_{3\Gamma}}}{\varepsilon_3 b_1} (-1)^{m_{3\Gamma}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_p}{\gamma_{1p}^2 + \left(\frac{m_{3\Gamma} \pi}{d}\right)^2} F1, \quad (12)$$

где

$$F1 = \begin{cases} \frac{\frac{p\pi}{b_1}}{\left(\frac{m'_0 \pi}{b_0}\right)^2 - \left(\frac{p\pi}{b_1}\right)^2} \left\{ (-1)^{m'_0} \sin\left[\frac{p\pi}{b_1}(b_3 - y_1 - b_0)\right] - \sin\left[\frac{p\pi}{b_1}(b_3 - y_1)\right] \right\} & \text{при } \frac{p\pi}{b_1} \neq \frac{m'_0 \pi}{b_0}, \\ \frac{b_0}{2} \cos\left[\frac{p\pi}{b_1}(b_3 - y_1)\right] & \text{при } \frac{p\pi}{b_1} = \frac{m'_0 \pi}{b_0} \neq 0, \\ b_0 & \text{при } \frac{p\pi}{b_1} = \frac{m'_0 \pi}{b_0} = 0. \end{cases}$$

Во втором случае используем выражение для поля вспомогательного источника резонатора с продольным направлением по оси  $y$ . Исходное выражение для коэффициента  $C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0}$  в этом случае запишется:

$$C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0} = \int_{y_1}^{y_1+b_0} \cos\left[\frac{m'_0 \pi}{b_0}(y' - y_1)\right] \times \int_{-d}^0 \left(-\frac{1}{i\varepsilon_3}\right) \sum_{m_{3\Gamma}=0}^{\infty} \gamma_{3\Gamma m_{3\Gamma}} \cos\left(\frac{m_{3\Gamma} \pi}{d} z\right) \times \\ \times (-i\varepsilon_1) \frac{1}{d} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_p (-1)^p}{\gamma_{1p} sh(\gamma_{1p} b_1)} \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) \times ch[\gamma_{1p} (y' - b_3 - b_1)] dz dy'. \quad (13)$$

После интегрирования:

$$C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \gamma_{3\Gamma m_{3\Gamma}} \frac{\varepsilon_{m_{3\Gamma}}}{sh(\gamma_{1\Gamma m_{3\Gamma}} b_1)} \frac{1}{\gamma_{1\Gamma m_{3\Gamma}}^2 + \left(\frac{m'_0 \pi}{b_0}\right)^2} (-1)^{m_{3\Gamma}} \times \\ \times \left\{ (-1)^{m'_0} sh[\gamma_{1\Gamma m_{3\Gamma}} (y_1 + b_0 - b_3 - b_1)] - sh[\gamma_{1\Gamma m_{3\Gamma}} (y_1 - b_3 - b_1)] \right\} F1, \quad (14)$$

где

$$F1 = \begin{cases} 1 & \text{при } m_{3\Gamma} = 0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } m_{3\Gamma} \neq 0; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{m_{3\Gamma}} = \begin{cases} 1 & \text{при } m_{3\Gamma} = 0; \\ 2 & \text{при } m_{3\Gamma} \neq 0; \end{cases}$$

$$\gamma_{3\Gamma m_{3\Gamma}} = \sqrt{\left(\frac{m_{3\Gamma} \pi}{d}\right)^2 - \varepsilon_3}.$$

Аналитические выражения для вычисления коэффициента  $C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0}$  различны. Соотношение (12) включает в себя суммирование в бесконечном пределе по индексу  $p$ , в то время как соотношение (14) позволяет вычислять значение коэффициентов непосредственно. Однако численные значения коэффициентов, вычисленные по соотношению (12), при увеличении числа членов суммирования по индексу  $p$  стремятся к численному значению коэффициентов, вычисленных по (14).

В таблице приведены значения коэффициентов  $C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0}$  при различных  $m'_0$  и  $m'_{3\Gamma}$ , вычисленные по соотношению (12) при учёте разного количества слагаемых ряда по  $p$ . В последней справа колонке таблицы приведены значения коэффициентов, рассчитанные по соотношению (14). Расчеты проводились при следующих параметрах излучающей системы (см. рисунок):  $b_0=0,30\pi$ ,  $b_1=b_3=b_4=0,23\pi$ ,  $d=0.8\pi$ ,  $\epsilon_0=1$ ,  $\epsilon_1=3$ ,  $\epsilon_2=1$ ,  $\epsilon_3=\epsilon_4=3$ ,  $Y_1 = 0.195\pi$ .

Значения коэффициентов  $C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0}$

P	10	50	100	150	500	$C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0}$
$C_{m_{3\Gamma}=0}^{m'_0=0}$	0,00000000- -0,538781237j	0,00000000- -0,539275190j	0,00000000- -0,539281207j	0,00000000- -0,539281753j	0,00000000- -0,539281752j	0,00000000- -0,539281752j
$C_{m_{3\Gamma}=2}^{m'_0=0}$	0,233486849+ +0,00000000j	0,232470465+ +0,00000000j	0,232457916+ +0,00000000j	0,232456777+ +0,00000000j	0,232456780+ +0,00000000j	0,232456780+ +0,00000000j
$C_{m_{3\Gamma}=0}^{m'_0=1}$	0,00000000+ +0,236506601 j	0,00000000+ +0,236143398j	0,00000000+ +0,236137785j	0,00000000+ +0,236137316j	0,00000000+ +0,236137353j	0,00000000+ +0,236137353j
$C_{m_{3\Gamma}=2}^{m'_0=1}$	0,129104918+ +0,00000000j	0,1283556224+ +0,00000000j	0,128344520+ +0,00000000j	0,128343542+ +0,00000000j	0,128343619+ +0,00000000j	0,128343619+ +0,00000000j

Как следует из таблицы, при увеличении числа членов ряда по  $p$  в выражении (12) значения коэффициента  $C10L_{m_{3\Gamma}}^{m'_0}$  стремятся к значениям, вычисленным по выражению (14). Для выбранных размеров излучающей системы совпадение значений коэффициентов в пятом знаке после запятой имеет место при  $p>100$ . При увеличении размера  $b_1$  совпадение значений с заданной точностью наступает при учёте меньшего количества слагаемых в выражении (12).

**Выводы.** Результаты вычисления подобных элементов блочной матрицы показали, что численные значения коэффициентов, рассчитанные по соотношениям (12) и (14), совпадают. При этом совершенно очевидно снижение вычислительных затрат в случае использования поля вспомогательного источника резонатора с продольным направлением, совпадающим с продольным направлением волновода, по поперечному размеру которого производится интегрирование. Это обусловлено тем, что хотя соотношения для расчета коэффициентов имеют один порядок сложности, но в одном случае (см. формулу (14)) вычисления производятся один раз, а в другом случае (см. формулу (12)) – сотни раз.

**Библиографический список**

1. Марков Г.Т. Электродинамика и распространение радиоволн / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М.: Советское радио, 1979. – 373 с.
2. Марков Г.Т. Тензорные функции Грина прямоугольных волноводов и резонаторов / Г.Т. Марков, Б.А. Панченко // Изв. вузов. Радиотехника. – 1964. – Т.7. – № 1. – С. 34-41.

Материал поступил в редакцию 04.03.10.

**A.P. ZVEREV**

**SELECTION FEATURES OF THE FIELDS REPRESENTATION  
FOR THE ADDITIONAL SOURCES OF THE PARTIAL DOMAINS**

The possibility to decrease the computational expenditures when solving the boundary problems at the expense of the rational representation of the Green's functions is shown in the article. The capability of more optimal algebraization of the mathematical relations is illustrated on the example of solving the problem of the electro-dynamical analysis.

**Keywords:** horn radiator, layered filling, Galerkin's method, integration.

**ЗВЕРЕВ Алексей Петрович** (р. 1962). Начальник связи Ростовского военного института ракетных войск. Кандидат технических наук (2005). Окончил Ростовский военный институт ракетных войск в 1984 году.

**Область научных интересов:** математические методы моделирования волноводных антенных решеток с укрытиями, прикладная электродинамика, техника средств связи военного назначения. Имеет 42 научные публикации.

evgmensh@yandex.ru